ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ҚӮРҒОНТЕППА
ба номи НОСИРИ ХУСРАВ

КУРГАН-ТЮБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени НОСИРА ХУСРАВА

ПАЁМИ
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ҚӮРҒОНТЕППА ба номи
НОСИРИ ХУСРАВ
(маҷаллаи илмӣ)

ВЕСТНИК
КУРГАН-ТЮБИНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА имени НОСИРА ХУСРАВА
(научный журнал)

2/2 (38)

СИЛСИЛАИ ИЛМҲОИ ТАБИӢ
СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ҚӮРҒОНТЕППА,
2016

ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ҚӮРҒОНТЕППА
ба номи НОСИРИ ХУСРАВ

КУРГАН-ТЮБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени НОСИРА ХУСРАВА

МАҶАЛЛАИ ИЛМӢ СОЛИ 2008 ТАЪСИС ЁФТА, СОЛИ 2013 ТАҒЙИРИ НОМ КАРДААСТ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 2008 ГОДУ И ПЕРЕИМЕНОВАН В 2013 ГОДУ

Сармуҳаррир Шодиев М.С.

Ҷонишини сармуҳаррир

Комилӣ А.Ш.- доктори илмҳои физика-математика, профессор.
Абдураҳимов А.О.- номзади илмҳои физика-математика, дотсент.

Котиби масъул

Болтаев М.А.- номзади илмҳои химия, дотсент.

Ҳайати таҳририя:

Қурбонов И.Қ.-доктори илмҳои физика-математика, профессор узви вобастаи АИ ҶТ.
Рачабов Н.Р.-доктори илмҳои физика-математика, профессор, академики АИ ҶТ.
Акбаров Р- доктори илмҳои физика-математика, профессор.
Табаров А.Ҳ.- доктори илмҳои физика-математика, профессор.
Бадалов А.Б.-доктори илмҳои химия, профессор.
Сафаров Ҷ.С.-доктори илмҳои физика-математика, профессор.
Абдуллоев А.А.-доктори илмҳои биологӣ, профессор.
Бердиев Ҷ.Б.-номзади илмҳои биологӣ. дотсент.

Главный редактор Шодиев М.С.

Заместители главного редактора

Комили А.Ш.- доктор физико-математических наук, профессор.
Абдурахимов А.О.- кандидат физико-математических наук, доцент.

Ответственный секретарь

Болтаев М.А.- кандидат химических наук, доцент.

Члены редколлегии:

Сафаров Дж.С.-доктор физико-математических наук, профессор.
Курбонов И.К.-доктор физико-математических наук, профессор, член.-корр. АН РТ.
Раджабов Н.Р.-доктор физико-математических наук, профессор, академик АН РТ.
Акбаров Р.- доктор физико-математических наук, профессор.
Табаров А.Х.- доктор физико-математических наук, профессор.
Бадалов А.Б.-доктор химических наук, профессор.
Абдуллоев А.А.-доктор биологических наук, профессор.
Бердиев Дж.Б.-кандидат биологических наук, доцент.

Мақолаҳо дар мачалла вобаста бо нусхаи асл бо забонҳои точикӣ, русӣ ва ё англисӣ нашр мешаванд
Статьи в журнале печатаются на основе оригинала на таджикском, русском или английском языках

© Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав

УДК 517.9

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Курбаншоев С.З.
Душанбинский филиал Московского института стали и сплавов

В работе для установления условий существования экспоненциальной дихотомии решений [1] используются определенно положительной эрмитовой формы функции Ляпунова. Используются генеральные показатели [2] решений исходной системы.

Определение 1. Число γ называется генеральным показателем решения $X = X(t)$ системы линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ)

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) \tag{1}$$

на бесконечном интервале I, если существуют последовательности t_n, τ_n $(n = 1,2,\ldots)$ такие, что $t_n \in I, \tau_n \in I,\ \ t_n - \tau_n \to +\infty$ и

$$\lim_{t_n - \tau_n \to +\infty} \frac{\ln\|X(t_n)\| - \ln\|X(\tau_n)\|}{t_n - \tau_n} = \gamma .$$

Определение 2. Генеральный показатель γ, принадлежащий спектру генеральных показателей системы (1), называется иллимитным [3], если существует решение $X = X(t)$ системы (1) такое, что верхний генеральный показатель

$$\lim_{t-\tau\to\infty} \frac{\int_\tau^t \left\| X(t)e^{\gamma s} \right\|^2 ds}{\left\| X(\tau)e^{-\gamma\tau} \right\|^2 + \left\| X(t)e^{-\gamma t} \right\|^2} = +\infty ,$$

в противном случае, генеральный показатель γ будем называть лимитным. СЛДУ (1) называется иллимитной, если все её генеральные показатели являются иллимитными.

Теорема 1. Для того чтобы иллимитная система (1) с ограниченными при $t \in (-\infty, +\infty)$ комплексными коэффициентами была экспоненциально дихотомичной с показателем τ, необходимо и достаточно, чтобы существовала эрмитовая форма $v(t, X)$ с ограниченными на всей оси t коэффициентами, для которой эрмитова форма

$$w_\sigma(t, X) = 2\sigma v(t, X) - \frac{dv(t, X)}{dt} \tag{2}$$

была бы определённо положительной.

Доказательство. Необходимость существования эрмитовой формы $v(t, X)$ справедлива для произвольной системы (1) с кусочно непрерывными комплексными элементами в случае, когда τ не принадлежит спектру генеральных показателей. При этом смешанная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A(t) - E\tau)Y(t), \quad Y(t) = X(t)e^{-\tau t}$$

является экспоненциально дихотомичной и для неё существует матрица Грина $G(t,\tau) = G(t,\tau)\exp\{\gamma(t-\tau)\}$. В этом случае по заданной определённо

положительной эрмитовой форме $w(t,Y)$ построится функция Ляпунова $v(t,Y)$ в виде эрмитовой формы с ограниченными на всей оси t коэффициентами.

Достаточность. Предположим, что существует эрмитова форма $v(t,Y)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dv(t,Y)}{dt} = -w(t,Y), \tag{3}$$

и для эрмитовых форм $v(t,Y)$, $w(t,Y)$ выполнены условия $|v(t,Y)| \le a^2\|Y\|^2$, $w(t,Y) \ge b^2\|Y\|^2$ $(a,b>0)$. Интегрируя уравнение [3] на промежутке $[t,Y]$, будем иметь

$$v(\tau,Y(\tau)) - v(t,Y(t)) = \int_\tau^t w(s,Y(s))ds. \tag{4}$$

Левая часть равенства (4) удовлетворяет условию $|v(\tau,Y(\tau)) - v(t,Y(t))| \le$ $\le a^2\left(\|Y(\tau)\|^2 + \|Y(t)\|^2\right)$, правая часть условию $\int_\tau^t w(s,Y(s))ds \ge b^2\int_\tau^t \|Y(s)\|^2 ds$.

Пусть τ, t такие, чтобы выполнялось неравенство

$\int_\tau^t \|Y(s)\|^2 ds > a^2b^{-2}\left(\|Y(\tau)\|^2 + \|Y(t)\|^2\right)$. При этом получим неравенство

$|v(\tau,Y(\tau)) - v(t,Y(t))| < \left|\int_\tau^t w(s,Y(s))ds\right|$, которое противоречит равенству (2).

Таким образом, если существует функция Ляпунова - эрмитова форма $v(t,X)$ с ограниченными на всей оси t коэффициентами, удовлетворяющая уравнению (2), где $w(t,X)-$определенно положительная форма, то τ не принадлежит спектру генеральных показателей. При этом имеет место экспоненциальная дихотомия решений системы (1) с показателем τ.

Теорема 2. Пусть для СЛДУ

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t,\varepsilon)X(t) \ \ (-\infty < t < \infty,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0) \tag{5}$$

матрица $A(t,\varepsilon)$ определена и равномерно ограничена при всех значениях $t \in (-\infty,\infty)$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ и удовлетворяет условию непрерывности

$$\sup_t \int_t^{t+T} \|A(t,\varepsilon) - A(t,\varepsilon_1)\| dt \to 0, \text{ при } \varepsilon \to \varepsilon_1;\ \varepsilon,\varepsilon_1 \in [0,\varepsilon_0],$$

или более слабому требованию интегральной непрерывности

$$\sup_t \int_t^{t+T} \|A(t,\varepsilon) - A(t,\varepsilon_1)\| dt \to 0 \text{ при } \varepsilon \to \varepsilon_1 \text{ (T=const).}$$

Пусть функция Ляпунова - квадратичная форма $v(t,X,\varepsilon) = X^*C(t,\varepsilon)X$ имеет непрерывные и кусочно дифференцируемые по t коэффициенты равномерно ограниченные при всех $t \in (-\infty,\infty)$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, и производная функции $v(t,X,\varepsilon)$ в силу СЛДУ (5) является определённо отрицательной квадратичной формой, т.е.

$$\frac{dv(t,X,\varepsilon)}{dt} = -X^* B(t,\varepsilon)X \le -b^2 X^* X \ \ (-\infty < t < \infty,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0).$$

Тогда, если СЛДУ (5) экспоненциально дихотомична при некотором значении $\varepsilon_1 \in [0,\varepsilon_0]$, то система (5) будет экспоненциально дихотомичной при всех значениях $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Розенвассер Е.Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления – М.: Наука, 1977. – 344 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
3. Валеев К.Г., Финин Г.С. Построение функций Ляпунова. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 412 с.

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Автором на основе использования показателей Ляпунова в теории линейных систем управления доказывается теоремы экспоненциально дихотомичное решение линейной системы дифференциальных уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дихотомия решений, эрмитовая форма, функция Ляпунова, генеральные показатели, нелимитный, лимитный, ось, коэффициент.

ON EXPONENTIALLY DICHOTOMY OF SOLUTIONS OF LINEAR SYSTEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

The author based on the use of Lyapunov exponents in the theory of linear control systems is proved by theorem exponentially dichotomous solution of a linear system of the differential equations.

KEY WORDS: dichotomy solutions, Hermitian form, Lyapunov's function, the General indicators, unlimit, limit, axle, coefficient.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Курбаншоев Сафарали Завкибекович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры естественнонаучных дисциплин Душанбинского филиала МИСиС.

УДК 517.946

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Сафаров Д.С.

Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим уравнение вида [1], [2]

$$w_{\bar z} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) + d(z)\overline{w(z_0)} = f(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy,\ w = u + i\upsilon,\ 2w_{\bar z} = w_x + iw_y,\ a,b,c,d,f -$ заданные двоякопериодические функции с основными периодами h_1, h_2, $\operatorname{Im}(h_2/h_1) \ne 0$, $z_0 -$ некоторая фиксированная точка области Ω, $\Omega -$ основной параллелограмм решетки $\Gamma = \{u_0 + m_1h_1 + m_2h_2, m_1, m_2 - \textit{целые},\ u_0 - \textit{некоторая точка плоскости } \mathbb{C}\}$.

Будем искать двоякопериодические решения уравнения (1), допускающие полюсы внутри параллелограмма Ω и принадлежащие классу $C^1(\Omega_1)$, где $\Omega_1 -$ часть области Ω несодержащие полюсов решения. Класс таких решений уравнения (1) обозначим

через $\widetilde{C}_*^1$. В случае, когда $\Omega \setminus \Omega_1 = \varnothing -$ пустое множество, то такие решения будем называть регулярными, и их обозначим через C_*^1. Далее, обозначим через $H_*^\alpha -$ класс двоякопериодических и непрерывных по Гёльдеру функций в Ω, с показателем $\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$.

Теперь при условии $a(z), b(z), d(z), f(z) \in H_*^\alpha$, будем искать решение уравнения (1) из класса $\widetilde{C}_*^1$ с полюсами $b_1, b_2, ..., b_r -$ лежащие внутри области Ω соответственно с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$.

В работе [3] все решения уравнения (1) при $b(z) \equiv 0, d(z) \equiv 0$, из класса $\widetilde{C}_*^1$ выписаны в явном виде через эллиптические функции Вейерштрасса $\zeta(z) -$ дзета, $\sigma(z) -$ сигма, $\wp(z) -$ пе функций, построенные на периодах h_1, h_2, $\mathrm{Im}(h_2 / h_1) \ne 0$. Не ограничивая общности можно считать, что $u_0 = 0$ и Γ решетка $\Gamma = \{ m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 - \textit{целые} \}$ и $\Omega -$ основной параллелограмм с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

В упомянутой работе показано, что при $a_0 \in \Gamma$ уравнение (1) не всегда разрешимо в классе $\widetilde{C}_*^1$, а в случае $a_0 \overline{\in} \Gamma$ оно всегда разрешимо, где $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \iint\limits_\Omega a(z) d\Omega$. Используя эти результаты мы находим условие, дополнительные на $b(z), d(z)$ при выполнении которых уравнение (1) однозначно разрешимо в классе $\widetilde{C}_*^1$ как при $a_0 \in \Gamma$, так и при $a_0 \overline{\in} \Gamma$.

Согласно результатам этой работы при $a(z) \in H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$ интеграл

$$g(z) = \mathrm{T}_\zeta a(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_\Omega a(t) \zeta(t - z) d_t \Omega, \tag{2}$$

где $\zeta(z) -$ дзета – функция Вейерштрасса обладает дифференциальным свойством интеграла Векуа [1],

$$\mathrm{T}_\Omega \varphi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_\Omega \varphi(t) \frac{d\Omega}{t - z}.$$

1) $g_{\bar z} = a(z)$;

2) $g(z + h) = g(z) + \eta a_0,\ h = m_1 h_1 + m_2 h_2,\ \eta = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2$, где $m_1, m_2 -$ целые числа, $\eta_1 = 2\zeta(h_1 / 2),\ \eta_2 = 2\zeta(h_2 / 2) -$ циклические постоянные и вместе с периодами h_1, h_2 связаны соотношением Лежандра [4]

$$\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i, \tag{3}$$

3) $\dfrac{\partial}{\partial z} \mathrm{T}_\zeta \rho = S_\zeta \rho = -\dfrac{1}{\pi} \iint\limits_\Omega \rho(t) \wp(t - z) d_t \Omega,\ \wp(z) = -\zeta'(z)$

и $S_\zeta : \left\{ \rho : \rho \in H_*^\alpha,\ \iint\limits_\Omega \rho d\Omega = 0 \right\} \to H_*^\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$.

Если $a_0 \in \Gamma$, то функция

$$\psi(z) = \exp(\mu z + g(z)) \in C_*^1, \tag{4}$$

где постоянное μ удовлетворяет уравнению

$$\exp(\mu h_1 + \eta_1 a_0) = \exp(\mu h_2 + \eta_2 a_0) = 1.$$

Легко видеть, что $\psi(z)$ является решением уравнения

$$u_{\bar z} + a(z)u(z) = 0, \tag{4'}$$

в классе C_*^1, при $a_0 \in \Gamma$.

Воспользуясь этим свойством функции $\psi(z)$ и умножая обе части уравнения (1) на $\psi(z)$ получим неоднородное уравнение Коши – Римана

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(w(z)\psi(z)) = F(z)\psi(z), \tag{5}$$

где $F(z) = f(z) - b(z)w(z_0) - d(z)\overline{w(z_0)}$.

Так как $F(z)\psi(z) \in H_*^\alpha$, то из результатов работы [3] следует: уравнение (5) имеет решение с заданными полюсами в точках $b_1, b_2, ..., b_r$, соответственно с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, если существует квазиэллиптическая функция $\Phi(z)$ имеющая полюсы $b_1, b_2, ..., b_r$, удовлетворяющая условиям:

$$\Phi(z + h_j) = \Phi(z) + \eta_j F_0,\ j = 1,2.$$

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} s\,\Phi(z) = F_0, \tag{6}$$

где $F_0 = \dfrac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} F(z)\psi(z)d\Omega$.

Теперь введем следующие числа

$$f_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(z)\psi(z)d\Omega,\ b_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} b(z)\psi(z)d\Omega,$$

$$d_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} d(z)\psi(z)d\Omega. \tag{7}$$

Условие (6) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (5) в классе $\widetilde{C}_*^1$.

Подставляя значения F_0 в правой части (6), относительно неизвестных $w(z_0)$ и $\overline{w(z_0)}$, получим уравнение вида

$$b_0 w(z_0) + d_0\overline{w(z_0)} = f_0 - \sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} s\,\Phi(z) = f_1. \tag{8}$$

Взяв в (8) комплексную сопряженную получим ещё одно уравнение

$$\overline{b}_0\overline{w(z_0)} + \overline{d}_0 w(z_0) = \overline{f}_1. \tag{9}$$

Решив совместно (8), (9) относительно $w(z_0)$ и $\overline{w(z_0)}$ при $|b_0| \neq |d_0|$ получим

$$w(z_0)=\frac{1}{|b_0|^2-|d_0|^2}\left(f_1\bar{b}_0-\bar{f}_1 d_0\right)=A,\quad \overline{w(z_0)}=\frac{1}{|b_0|^2-|d_0|^2}\left(f_1\bar{d}_0-\bar{f}_1 b_0\right)=\bar{A}. \quad (10)$$

Теперь будем искать решения уравнения (1) такие, что функция $w(z)\psi(z)$ имеет в полюсах $b_1,b_2,...,b_r$ соответственно главные части и

$$\frac{A_k}{z-b_k}+\sum_{j=2}^{\lambda_k}(-1)^j\frac{(j-1)!\,A_k^{(j-1)}}{(z-b_k)^j},\ k=1,2,...,r. \quad (11)$$

Тогда квазиэллиптическая функция $\Phi(z)$ будет иметь вид [?]

$$\Phi(z)=c+\sum_{k=1}^{r}A_k\zeta(z-b_k)+\sum_{k,j}A_k^{(j-1)}\wp^{(j-2)}(z-b_k), \quad (12)$$

где $c-$постоянная, а постоянные $A_k=\operatorname*{Res}_{z=b_k}\Phi(z)$.

Таким образом справедлива

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1)* $a(z),b(z),d(z),f(z)\in H_*^{\alpha}$, $0<\alpha\le 1$ *и* $a_0\in\Gamma$. *Тогда при условии* $|b_0|\ne|d_0|$ *для разрешимости уравнения с заданными главными частями (8) необходимо и достаточно, чтобы точка* $z_0\in\Omega$ *была* $A-$*точкой решения уравнения (1), то есть* $w(z_0)=A$, $A-$*имеет вид (10), и* $z_0-b_k\ \overline{\in}\ \Gamma$, $k=1,2,...,r$. *При этом однородное уравнение всегда допускает решение, а неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части и решение уравнения (1) представимо в виде*

$$w(z)=\frac{1}{\psi(z)}\left[\Phi(z)+\mathrm{T}_\zeta F(z)\right],$$

где $F(z)=\left[f(z)-b(z)A-d(z)A\right]\psi(z)$, *квазиэллиптическая функция* $\Phi(z)$ *имеет вид (12).*

Постоянное c находится из равенство

$$A\psi(z_0)=c+\sum_{k=1}^{r}A_k\zeta(z_0-b_k)+\sum_{k,j}A_k^{(j-1)}\wp^{(j-2)}(z_0-b_k)+\mathrm{T}_\zeta F(z_0),$$

причём $z_0-b_k\ \overline{\in}\ \Gamma$, $k=1,2,...,r$.

Из этой теоремы для регулярных решений уравнения (1), то есть решение без полюсов получим

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда в классе регулярных двоякопериодических функций, то есть класса* C_*^1, *однородное уравнение имеет только нулевое решение,* $w(z)\equiv 0$. *Неоднородное уравнение имеет притом единственное решение вида.*

Действительно в случае $f(z)\equiv 0$, для регулярных решений однородного уравнения

$$w_{\bar{z}}+aw(z)+bw(z_0)+d\overline{w(z_0)}=0, \quad (13)$$

все коэффициенты главной части решения в (11) равны нулю $A_k^{(j)}=0$ и уравнение (5) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(w(z)\psi(z))=-\left(b(z)w(z_0)+d(z)\overline{w(z_0)}\right)\psi(z).$$

Интегрируя это уравнение по параллелограмму Ω, в силу формулы Грина для функций класса [ ], $\varphi(z) \in C_*^1$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi(z) d\Omega = \frac{1}{2i} \int_{D\Omega} \varphi(z) d\Omega = 0,$$

получим

$$b_0 w(z_0) + d_0 \overline{w(z_0)} = 0,$$

где постоянные b_0, d_0 определяются из равенств (7), а функция $\psi(z)$ имеет вид (3). Решая последние уравнения совместно с уравнением

$$\bar{b}_0 \overline{w(z_0)} + \bar{d}_0 w(z_0) = 0$$

в силу условия $|b_0| \neq |d_0|$, получим $w(z_0) = 0$.

Тогда всякое решение уравнение (13) в классе C_*^1 представимо в виде [3]

$$w(z) = \begin{cases} c \exp(\psi(z)), \ \textit{если} \ a_0 \in \Gamma, \\ 0, \quad \textit{если} \quad a_0 \in \Gamma. \end{cases}$$

где $c -$ произвольная постоянная.

Из последней формулы в силу условий $w(z_0) = 0$, получим $w(z) \equiv 0$. Следовательно однородное уравнение имеет лишь нулевое решение.

Неоднородное уравнение (1) разрешимо в классе C_*^1, если z_0 является A точкой решения уравнения, то есть $w(z_0) = A$, где $A -$ имеет вид (10), в которой $f_1 = f_0$.

При этом

$$w(z) = \frac{1}{\psi(z)} \left[c + \mathrm{T}_{\zeta} F(z) \right],$$

где $F(z) = \left[f(z) - b(z) A - d(z) \bar{A} \right] \psi(z)$, а постоянная c определяется из равенство

$$A \psi(z_0) = c + \overset{\circ}{\mathrm{T}}_{\zeta} (f \psi) - A \overset{\circ}{\mathrm{T}}_{\zeta} (b \psi) - \bar{A} \overset{\circ}{\mathrm{T}}_{\zeta} (d \psi),$$

$$\overset{\circ}{\mathrm{T}}_{\zeta} \rho = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \rho(t) \zeta(t - z_0) d_t \Omega.$$

Теперь находим решение уравнения (1) с заданными нулями $a_1, a_2, ..., a_r$ и с полюсами $b_1, b_2, ..., b_r$, соответственно, с учётом их кратности и лежащие внутри области Ω.

Предположим, что выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - a_k) \equiv a_0 (\mathrm{mod}\, \Gamma), \tag{14}$$

где $a_0 = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} a(z) d\Omega$, причём при $a_0 \in \Gamma$, $r \geq 2$, а в случае $a_0 \overline{\in} \Gamma$, $r \geq 1$.

При выполнения условия (14) функция

$$\chi(z) = \prod_{k=1}^{r} \frac{\sigma(z - a_k)}{\sigma(z - b_k)} \exp(\mathrm{T}_{\zeta} a(z)), \tag{15}$$

удовлетворяет уравнению ($4'$), и в силу свойства функции $\sigma(z)$ является двоякопериодической функцией с нулями $a_1, a_2, ..., a_r$ и с полюсами $b_1, b_2, ..., b_r$.

Тогда отношение $w(z)/\chi(z)$ является регулярным решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{w(z)}{\chi(z)}\right)=\frac{1}{\chi(z)}\left(f(z)-b(z)w(z_0)-d(z)\overline{w(z_0)}\right). \tag{16}$$

Если дополнительно от $b(z), d(z), f(z)$ потребовать условие

$$f_1(z)=f(z)/\chi(z),\ b_1(z)=b(z)/\chi(z),\ d_1(z)=d(z)/\chi(z)\in H_*^{\alpha},$$

то для разрешимости уравнения (16) необходимо и достаточно, чтобы

$$b_1^{\circ}w(z_0)+d_1^{\circ}\overline{w(z_0)}=f_1^{\circ},$$

где

$$f_1^{\circ}=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}f_1(z)d\Omega,\ b_1^{\circ}=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}b_1(z)d\Omega,\ d_1^{\circ}=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}d_1(z)d\Omega.$$

Решая совместно последнее уравнение с сопряжённым к нему уравнение

$$\overline{b_1^{\circ}}\,\overline{w(z_0)}+\overline{d_1^{\circ}}\,w(z_0)=\overline{f_1^{\circ}},$$

при $\left|b_1^{\circ}\right|\neq\left|d_1^{\circ}\right|$ получим, что для разрешимости уравнения (16) необходимо и достаточно, чтобы точка $z_0\in\Omega$ была $A-$точкой решение уравнения

$$w(z_0)=A,$$

где

$$A=\frac{1}{\left|b_1^{\circ}\right|^2-\left|d_1^{\circ}\right|^2}\left(f_1^{\circ}\overline{d_1^{\circ}}-\overline{f_1^{\circ}}\,\overline{b_1^{\circ}}\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $a_1,a_2,\ldots,a_r-$ *нули,* $b_1,b_2,\ldots,b_r-$ *полюсы решения уравнения (1) лежащие внутри параллелограмма* Ω *с учетом их кратности. Пусть* $a(z)\in H_*^{\alpha}$ *и функция* $\chi(z)$ *двоякопериодическая функция построенная формулой (15) и функции* $f_1(z)=f(z)/\chi(z)\in H_*^{\alpha}$, $b_1(z)=b(z)/\chi(z)\in H_*^{\alpha}$, $d_1(z)=d(z)/\chi(z)\in H_*^{\alpha}$, $0<\alpha\leq 1$ *и* b_1°, d_1°, $f_1^{\circ}-$ *числа вида*

$$f_1^{\circ}=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}f_1(z)d\Omega,\ b_1^{\circ}=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}b_1(z)d\Omega,\ d_1^{\circ}=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}d_1(z)d\Omega$$

и выполнено соотношение (14).

Тогда для разрешимости уравнения (1) с заданными нулями и полюсами необходимо и достаточно, чтобы точка z_0*, была* $A-$*точкой решения уравнения (1), то есть* $w(z_0)=A$*, где*

$$A=\frac{1}{\left|b_1^{\circ}\right|^2-\left|d_1^{\circ}\right|^2}\left(f_{\circ}^{\circ}\overline{d_1^{\circ}}-\overline{f_1^{\circ}}\,\overline{b_1^{\circ}}\right).$$

При этом все решения уравнения при любой правой части представимы в виде

$$w(z)=\chi(z)\left[c+T_{\zeta}f_1(z)-A\mathrm{T}_{\zeta}b_1(z)-\overline{A}\,\mathrm{T}_{\zeta}d_1(z)\right],$$

причём постоянная c *определяется из уравнений*

$$A=\chi(z_0)\left(c+T_{\zeta}f_1(z_0)-A\mathrm{T}_{\zeta}b_1(z_0)-\overline{A}\,\mathrm{T}_{\zeta}d_1(z_0)\right).$$

Здесь

$$\mathrm{T}_{\zeta}\rho(z_0) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\rho(t)\zeta(t-z_0)d\Omega.$$

Аналогичным образом можно найти решения уравнения (1) при $a_0 \overline{\in} \Gamma$ в полюсах с главными частями (11).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. - 690 с.
2. Нахутев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. – М.: Наука, 2012.
3. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения. – Душанбе: Дониш, 2012. - 190 с.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе исследуется вопросы существования и нахождения двоякопериодических решений уравнения обобщенных аналитических функций вида

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) + d(z)\overline{w(z_0)} = f(z),$$

с периодами h_1, h_2, $\mathrm{Im}(h_2/h_1) \neq 0$. С помощью методов эллиптических функций изучается вопросы существования разрешимости задачи.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: двоякопериодическая функция, решение, аналитическая функция, эллиптическая функция, уравнение, равенство, формула Грина.

DOUBLY PERIODIC SOLUTION TO LOADED EQUATION OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

The paper investigates the issues of existence and finding of doubly periodic solutions to equations of generalized analytic functions of the form

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)w(z_0) + d(z)\overline{w(z_0)} = f(z),$$

Periods $h_1, h_2, Im\ (h_2/h_1) \neq 0.$ While using methods of elliptic functions, we study the questions of existence, solvability of the problem.

KEY WORDS: doubly periodic function, solution, analytic function, elliptic function, equation, equality, Green's formula.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Сафаров Джумабой, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 917-07-96-40.

УДК 513.7

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Сатторов А.Э.

Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

Пусть задано n-мерное дифференцируемое многообразие X_n, которое в дальнейшем будет называться базой (или базисным пространством). Допустимые преобразования координат многообразия

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), i, j, \dots \overline{1, n} \quad F = i' \tag{1}$$

с якобианам $\Delta = \left|\left(f_i^{i'}\right)\right| \neq 0$, где $f_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$

К каждой точке (x^i) пространства X_n ассоциируем пространство значений контравариантной векторной плотности u^i веса p. Преобразование базисного пространства (1) индицирует преобразование

$$u^{i'} = \Delta^{-p} f_i^{i'} u^i \tag{2}$$

Согласно определению пространство опорных элементов [1], u-называется опорным объектом, совокупность (x, u)-опорным элементом, точка (x^i) базисного пространства-центром опорного элемента. Получаемое таким образом пространство $X_{n,u}$ называется векторная плотность [2].

Целью настоящей работы является изучение касательных пространств и их оснащение в $X_{n,u}$. С каждым опорным элементом (x, u) пространства $X_{n,u}$ ассоциируются, в аналогии [2], два векторные пространства:

1. Касательное векторное пространство T_{2n} (x, y), изоморфное пространству операторов $\{X_i, U_j\}$, где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i\,, \qquad U_j = \frac{\partial}{\partial u^j} = \widehat{\partial}_j\,.$$

2. Касательное дуальное векторное пространство $T_{2n}^*(x,u)$ натуральный корепер (или натуральный базис) которого $\{dx^i, du^i\}$.

Для векторов $\widehat{\partial}_j$ имея ввиду (2), находим

$$\widehat{\partial_{j'}} = \widehat{\partial_{i'}} \frac{du^i}{du^{j'}} = \widehat{\partial}_j \Delta^p f_{j'}^j.$$

Дифференцируя равенство (2) по x^i, получим

$$\partial_{i'} u^j = A_{i'}^j, \text{ где } A_{i'}^j = -\Delta^p u^r \partial_s \left(\Delta^{-p} f_r^{j'}\right) f_{j'}^j f_{i'}^s$$

Тогда имеем

$$\partial_{i'} = \partial_i f_{i'}^i + \widehat{\partial}_j \cdot \partial_{i'} u^j = \partial_i f_{i'}^i + \widehat{\partial}_j A_{i'}^j$$

Отсюда, если обозначить через $(\bar{e}_i\,, \bar{e}_j)$ базис пространства $T_{2n}(x,u)$, то получим следующие законы преобразования

$$\begin{cases} \bar{e}_{i'} = \bar{e}_i f_{i'}^i + \bar{e}_j A_{i'}^i \\ \bar{e}_{j'} = \qquad \bar{e}_i B_{j'}^i \end{cases} \tag{3}$$

где $B_{i'}^i = \Delta^p f_{i'}^i$.

Следовательно, матрица соответствующей группы преобразования пространства $T_{2n}(x,u)$, индуцированной преобразованиями (1) и (2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_{i'}^i & 0 \\ A_{i'}^i & B_{i'}^i \end{pmatrix}.$$

Векторы $\bar{e}_{i'}$ образуют натуральный репер инвариантного подпространства пространства $T_{2n}(\lambda,u)$, это подпространство называется вертикальным подпространством касательного пространства $T_{2n}(x,u)$.

Подпространство T^x называется оснащающим (горизонтальным) подпространством пространства $T_{2n}(x,u)$, если оно обладает свойством $T = T^k \oplus T^u$ и является инвариантным относительно группы преобразований пространства T. Таким образом, если в (x, u) существует T^x, то соответствующее касательное пространство является инвариантно оснащенным.

Аналогичные результаты можно получить и для натурального корепера, и тогда матрица группы преобразований пространства имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_i^{i'} & \tilde{A}_k^{i'} \\ 0 & \tilde{B}_i^{i'} \end{pmatrix}_{i'},$$

где $\tilde{A}_k^{i'} = u^i \partial_k \left(\Delta^{-P} f_i^{i'}\right)$ и $\tilde{B}_i^{i'} = \Delta^{-P} f_i^{i'}$.

Известно [3], что в оснащающем подпространстве T^x можно построить базис из векторов

$$E_i = \bar{e}_i - \Gamma_i^j \bar{e}_j, \tag{4}$$

так как T^x инвариантно относительно группы преобразований (3), то имеет место

$$E_{i'} = C_{i'}^i E_i,$$

отсюда нетрудно получить закон преобразования объекта Γ_i^j

$$\Gamma_{i'}^{j'} = \Delta^{-P} \Gamma_i^j f_{i'}^j f_j^{j'} - u^r \partial_s \left(\Delta^{-P} f_r^{j'}\right) f_{i'}^s. \tag{5}$$

Теорема: Касательные пространства $T_{2n}(x,u)$ и $T_{2n}^x(x,u)$ инвариантно оснащаются тогда и только тогда, когда в рассматриваемом пространстве задается поле объекта Γ_i^j с законом преобразования (5).

Аффинная связность в рассматриваемом пространстве состоит [2] из $L_{jk}^i(x,u)$-объекта аффинной связности из $C_{jk}^i(x,u)$-относительного тензора. Ковариантный дифференциал от относительного тензора $T_{(j)}^{(i)} = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ веса q имеет вид

$$\delta T_{(j)}^{(i)} = dT_{(j)}^{(i)} + \overline{L_{*k}^* T_{(j)}^{(i)}}^q dx^k + \overline{C_{*k}^* T_{(j)}^{(i)}}^q \delta u^k, \tag{6}$$

где использован символ Б.Л. Лаптева [1]

$$\overline{L_*^* T_{(j)}^{(i)}}^q = \sum_{m=1}^{s} L_{tk}^{im} T_{(j)}^{i,\dots t} - \sum_{m=1}^{r} L_{j_m k}^t T_{j,\dots t \dots j_r}^{(i)} - q L_{ek}^e T_{(j)}^{(i)}.$$

Если находим согласно (6) выражение ковариантного дифференциала от опорного объекта, то имеем

$$\delta u^i = N^{*i}_{\ r} \left(du^r + \overline{L_{*k}^* u^r}^P dx^k\right),$$

где $N^{*i}_{\ r}$ взаимный тензор к тензору $N_r^i = \delta_r^i - \overline{C_{*r}^* u^r}^P$ (тензор Б. Л. Лаптева) и $det\|N_r^i\| \neq 0$.

Можно установить связь между объектом Γ_j^i и объектом аффинной связности L_{jk}^i, которая имеет вид $\Gamma_j^i = \overline{L_{*j}^* u^i}^P$ и объект Γ_j^i называется объектом линейной дифференциально-геометрической связности.

Таким образом, задание в пространстве $X_{n,u}$ поле объектов $L_{jk}^i(x,u)$ также обеспечивает оснащение касательных пространств.

Исследуемое пространство можно рассматривать как расслоенное многообразие $E(X,F,G^n,P)$, где X-база, F-стандартный слой, G^n-структурная псевдогруппа слоя F с преобразованием (2), P-каноническая проекция $p: E \to X$ [4]. Здесь $p^i(x,u) = x^i$, поэтому каноническая проекция p определяет линейное отображение пространства $T_{2n}(x,u)$ на $T_n(x)$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лаптев Б.Л. Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов // Уч. зап. Казанского ун-та, 1958. - Т.118, кн. 4. - С. 75-147.
2. Sattarov A. Some problems of differential geometry of one class of supporting elements // Arch. math. BRNO, 1983, t.19. - №4. - P. 219-224.
3. Близникас В.И. К теории кривизны пространства опорных элементов // Литовск. матем. сборник, 1965. - Т.5, №1. - С. 9-29.
4. Сатторов А.О. О связности расслоения векторных плотностей // Тезисы док. межд. науч. конф. «Лобачевский и современная геометрия». – Казань, 1992.

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

В статье доказывается теорема касательных пространств T_{2n} (x,u), и $T^*_{2n}(x,u)$ инвариантно оснащенных, тогда когда задается поле объекта Γ^i_jс законом преобразования.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифференциальное многообразие, базисное пространство, преобразование, векторная плоскость, индуцированые преобразователи, подпространсто, вертикальное, касатальное, матрица, аффинная связность, тензор.

TANGENT SPACE AND THE CONNECTIVITY OF THE SPACE OF VECTOR DENSITIES

This article proves a theorem of tangent spaces T_{2n} (x,u), and $T^*_{2n}(x,u)$ is invariant feature, then when specify a field object Γ^i_j with law of transformation.

KEY WORDS: differential manifold, basic space, conversion, vector plane, induction transducers, subspace, vertical, tangent, matrix, affine connection, a tensor.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Сатторов Абдурасул Эшбекович, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 918-67-57-73.

УДК 517.948

СЛОЖНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ЯДРАМИ ИЗ КЛАССОВ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Махкамов К.Ш.
Курган-Тюбинский государственый университет имени Носира Хусрава

Пусть С-пространство непрерывных на $[0,2\pi]$ 2π - периодических функций с обычной нормой. Обозначим через c^r , $r = 1,2,\dots,$ пространство r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций. При этом

$$\|f\|_{c^r} = \|f\|_c + \left\|f^{(r)}\right\|_c .$$

Пусть множество $\Phi \subset C$, и множество H непрерывных интегральных операторов $H : C \to C$ вида

$$Hz = \int_0^{2\pi} H(t,\tau)z(\tau)d\tau \qquad (1)$$

таковы, что интегральное уравнение

$$z = Hz + f \qquad (2)$$

однозначно разрешимо при любых $H \in H$ и $f \in \Phi$. Класс таких уравнений (2) будем обозначать $[H, \Phi]$.

Пусть $W^{r,s}$ – линейное пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $H(t,\tau)$, у которых частные производные

$$H^{(i,j)}(t,\tau) = \frac{\partial^{i+j} H(t,\tau)}{\partial z^i \, \partial \tau^j}, i = 0,1, \dots, r, \qquad j = 0,1, \dots, s$$

непрерывны на квадрате $Q = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

$$W_{c,\alpha}^{r,s} = \left\{ H: H \in W^{r,s}, \max_{(t,r)\in Q} \left| H^{(i,j)}(t,\tau) \right| < \alpha_{ij}, \alpha = \{\alpha_{ij}\}, i = 0, \dots, r, j = 0, \dots, s \right\}$$

Обозначим через $H_c^r = H_c^r(\alpha,\beta)$ класс интегральных операторов вида (1), у которых $H(t,\tau) \in W_{c,\alpha}^{r,s}$ и $\|(I-H)^{-1}\|_{C\to c} \le \beta$.

Будем рассматривать следующие классы уравнений вида (2)
$\psi^r = \psi_C^r(\alpha,\beta,\gamma) = \left[H_c^r(\alpha,\beta), C_\gamma^r\right]$ - шар радиуса C_γ^r в пространстве γ с центром c^r в нуле.

В последнее время [1] возрос интерес к оценкам сложности приближенного решения различных задач. Под сложностью в данном случае понимается минимальное число элементарных операций, требуемых для нахождения решения с заданной точностью. В [2] ставится вопрос о точном порядке сложности уравнений Фредгольма II рода с ядрами и свободными членами из определенных функциональных классов. Для уравнений с ядрами из соболевских классов, когда $\left\|H^{(i,j)}\right\|_x \le \alpha_{ij}$; $x = C, L_r$; $i + j \le r$ ответ на этот вопрос получен в работах [3-5], где показано, что коэффициенты Фурье с номерами из гиперболических крестов являются оптимальной по порядку информацией о таких уравнениях. В настоящей статье дан ответ на вопрос из [2] для случая уравнений из ψ_c^r.

Теорема. При $r = 1,2, \dots$

$$E_N(\psi_c^r, c) \underset{\cap}{\overset{\cup}{}} N^{-r}, N \cap 2^n$$

$$comp\ c(\psi_c^r, \varepsilon) \underset{\cap}{\overset{\cup}{}} \varepsilon^{-1/r}, \varepsilon \cap N^{-r}$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Трауб., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
2. Worniakowski H. Infmation-based complexity // Ann. Rev.Comput. Sci, 1986. - P. 313-380.
3. Переверзев С.В. О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладками ядрами. // Укр. мат. журн., 1998. Т.40. - №1. – С. 84-91.
4. Переверзев С.В. О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладками ядрами. // Укр. мат. журн., 1989. Т.41. - №22. – С. 189-193.
5. Переверзев С.В. Оценка сложности приближенного решения уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн. - №10. – С. 1422-1425.

СЛОЖНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ЯДРАМИ ИЗ КЛАССОВ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье констатируется возросший интерес к оценкам сложности приближенного решения различных задач. Сложность уравнения Фредгольма автором трактуется как минимальное число операций, для нахождения решений, и рассматривается вопрос о точном порядке сложности уравнений второго рода с ядрами из определенных функциональных классов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пространство, периодическая функция, сложность уравнения, приближенное решение, точный порядок, совмещенная производная.

THE COMPLEXITY OF FREDHOLM EQUATIONS OF THE SECOND KIND WITH KERNELS FROM THE CLASSES WITH DOMINANT OFFSET DERIVATIVE

The article States the increased interest in estimates of the complexity of the approximate solution of different tasks. The complexity of the Fredholm equation of the author is interpreted as the minimum number of operations for finding solutions, and considers the question of the exact order of complexity of equations of the second kind with kernels from certain functional classes.

KEY WORDS: space, periodic function, the complexity of the equation, approximate solution, exact order, combined derivative.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Махкамов Камол Шарифович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики КТГУ имени Носира Хусрава.

УДК 511

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И ЕЁ НУЛИ

Хайруллоев Ш.А.
Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан

В работе применяя метод оптимизации экспоненциальных пар длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка дзета-функции Римана, выражена через константа Ранкина.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г. Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T,T+H)$ при $H \geq T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Чешский математик Ян Мозер [3] в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geq T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А. Карацуба [4] доказал теорему Харди-Литллвуда уже при $H \geq T^{5/32}\ln^2 T$.

В работе [5] задачу о величине промежутка $(T,T+H)$ критической прямой в которой, содержится нуль нечетного порядка дзета-функции сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть: *пусть* (k,l) *– произвольная экспоненциальная пара, отличная от* $(1/2,1/2)$, $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{\theta(k;l)}\ln^2 T$,

$$\theta(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\theta_1^{-1}(k;l)}\right), \quad \theta_1(k;l) = \frac{l}{0{,}5-k},$$

тогда промежуток $(T,T+H)$ *содержит нуль нечетного порядка дзета-функции Римана.*

Заметим, что минимизация $\theta(k;l)$ равносильно минимизации $\theta_1(k;l)$. В этой работе мы находим нижнюю грань величины $\theta_1(k;l)$ по множеству всех экпоненциальных пар.

Рассмотрим преобразование

$$\theta_1(k,l) = \frac{ak+bl+c}{dk+el+f}, \quad a,b,c,d,e,f - \text{вещественные.} \qquad (1)$$

Пусть P – множество всех экспоненциальных пар, получающихся из пары $(0,1)$ применением A и B – процессов:

$$A(k,l) = \left(\frac{k}{2k+2}, \frac{k+l+1}{2k+2}\right), \qquad B(k,l) = \left(l-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right).$$

Так как $B^2(k,l)=(k,l)$ и $A(0,1)=(0,1)$, то множество P состоит из экспоненциальных пар вида $\mathrm{P}=\{A^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}\cup\{BA^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}$.

По очевидным соображениям $A\mathrm{P}=\{A^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}$, $BA\mathrm{P}=\{BA^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B(0,1)\}$. Следовательно, $\mathrm{P}=A\mathrm{P}\cup BA\mathrm{P}$. Напомним, что A и B процессы можно задать как линейные преобразования в проективном пространстве. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\2&0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&-1\\2&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A\begin{pmatrix}k\\l\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k+l+1\\2k+2\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}k\\l\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2l-1\\2k+1\\2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

и в проективном пространстве они соответственно эквивалентны

$$\begin{pmatrix}\dfrac{k}{2k+2}\\ \dfrac{k+l+1}{2k+2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\kappa\\\lambda\\1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\dfrac{2l-1}{2}\\ \dfrac{2k+1}{2}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\kappa\\\lambda\\1\end{pmatrix},$$

где $(\kappa,\lambda)=A(k,l)$ и $(\kappa,\lambda)=B(k,l)$. Отождествление A и B – процессов с их матрицами особенно удобно, ибо композиции этих процессов соответствует произведению их матриц. Например матрицы, представляющие композиции $A(B(k,l))$ имеют вид AB.

Из соотношения $\mathrm{P}=A\mathrm{P}\cup BA\mathrm{P}$ для множества всех экспоненциальных пар следует, что $\inf\limits_{\mathrm{P}}\theta_1=\inf\limits_{\mathrm{P}}\theta_1 A$, либо $\inf\limits_{\mathrm{P}}\theta_1=\inf\limits_{\mathrm{P}}\theta_1 BA$.

Для нахождения $\inf\{\theta_1(k,l):(k,l)\in\mathrm{P}_1\}$ мы будем применять метод минимизации $\theta_1(k,l)=\dfrac{ak+bl+c}{dk+el+f}$, в котором используются следующие три леммы:

Лемма 1. *Пусть для* θ_1, *определенного в (1), выполняется* $dk+el+f>0\ \forall(k,l)\in\mathrm{P}$. *Определим* r: $r\le\inf\limits_{\mathrm{P}}(k+l)$ *и* $Y=\max(wr+v-u,w+v-u)$, $Z=\min(wr+v-u,w+v-u)$. *Если* $Z\ge 0$, *то* $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A$, *если же* $Y\le 0$, *то* $\inf\theta_1=\inf\theta_1 BA$.

Доказательство см. [6].

Эта лемма не дает ответа в случае $Y>0$ и $Z<0$. На такой случай нам частично даст ответ лемма 2.

Лемма 2. *Пусть* C *есть конечное произведение* A *и* B – *такое, что* $\inf\theta_1 BA=\inf\theta_1 BAC$ *и* $\sup\{k+l:(k,l)\in CA\mathrm{P}\}=r_1$. *Если* $\min(rw+v-u,r_1w+v-u)\ge 0$, *тогда* $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A$.

Доказательство см. [6].

Суть нашего будущего алгоритма состоит в следующем:

Пусть нам дано $\theta_1(k,l)=\dfrac{ak+bl+c}{dk+el+f}$ с $dk+el+f>0$. Применяем лемму 1 или лемму 2 (если это возможно) и определяем, какой из случаев $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A$ и $\inf\theta_1=\inf\theta_1 BA$ выполняется. Далее заменяем θ_1 на соответствующее $\theta_1 A$ или $\theta_1 BA$ (зависит от того, $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A$ или $\inf\theta_1=\inf\theta_1 BA$), и снова повторяем процедуру.

Через определенное количество иттераций мы получаем:

$$\inf\theta_1=\inf\theta_1 B^j A^{q_1} BA^{q_2} B\ldots A^{q_1} BA,\quad j=0,1;\quad q_i\ge 0.$$

Вполне возможно, что $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A^q$ для каждого $q\ge 0$. На этот случай ответ дает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* θ_1,u,v,w *такие, как в лемме 1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a) $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A^q\ \ \forall q\ge 0$;

b) $\inf\theta_1=\theta_1(0,1)$;

c) $w+v\ge u$, $u\le 0$.

Доказательство см. [6].

Таким образом, пошаговое описание алгоритма определения оптимальных экспоненциальных пар [6] имеет следующий вид.

1. Проверяем для $\theta_1=\dfrac{ak+bl+c}{dk+el+f}$ условие $dk+el+f>0$.
2. Вычисляем $\xi(\theta_1)$.
3. Применяя лемму 3 к θ_1, проверяем, выполняется ли условие $\inf\theta_1=\theta_1(0,1)$. Если выполняется, то останавливаемся.
4. Используя лемму 3 к $\theta_1 B$, проверяем, выполняется ли условие $\inf\theta_1=\theta_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Если выполняется, то останавливаемся.
5. Используя лемму 1 для проверки равенства $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A$, либо $\inf\theta_1=\inf\theta_1 BA$. Если лемма 1 неприменима, применяем лемму 2. Если и лемма 2 неприменима, то завершаем алгоритм, ибо он не работает в этом случае.
6. Если $\inf\theta_1=\inf\theta_1 A$, заменяем $\xi(\theta_1)$ на $\xi(\theta_1 A)$. Если $\inf\theta_1=\inf\theta_1 BA$, заменяем $\xi(\theta_1)$ на $\xi(\theta_1 BA)$. В противном случае, возвращаемся к шагу 5.

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Пусть* P_1 *множество всех экспоненциальных пар* (k,l) *отличных от* $(1/2,1/2)$ *и*

$$\theta_1(k;l)=\frac{l}{0{,}5-k}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\inf_{(k,l)\in\mathrm{P}_1}\theta_1(k;l)=R+1,$$

где $R=0{,}82902135\,6859133592\,4092397772\,831120\ldots$ *– постоянная Ранкина.*

Доказательство. В представлении

$$\theta_1(k,l)=\frac{ak+bl+c}{dk+el+f},$$

в нашем случае $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=-1$, $l=0$, $f=0{,}5$.

1. Условие $dk + el + f > 0$, то есть $-k + 0{,}5 > 0$ выполняется.

2. Согласно алгоритму минимизации преобразования (1) сопоставим матрицу

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w следующим образом

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}5, \quad v = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0, \quad w = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

а по ним составим вектор

$$\xi(\theta_1) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Согласно лемме 3 следующие условия эквивалентны:

а) $\inf \theta_1 = \inf \theta_1 A^q$, $\forall q > 0$;

б) $\inf \theta_1 = \theta_1(0,1)$;

с) $w + v \geq u$, $u \leq 0$.

В нашем случае $w + v = 1$, $u = 0{,}5$, то есть условия с) не выполняется, следовательно, и условии а) и б) также не выполнимы.

4. Лемму 3 применим и к $\theta_1 B$:

$$\theta_1 B = \frac{k + 0{,}5}{-l + 0{,}5 + 0{,}5} = \frac{k + 0{,}5}{-l + 1},$$

как в случае θ_1, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0{,}5$, $d = 0$, $l = -1$, $f = 1$. Сопоставим $B\theta_1$ матрицу

$$B\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим числа u, v, w:

$$u = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}5, \quad v = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad w = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

то есть

$$\xi(B\theta_1) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Как и в пункте 3, согласно лемме 3, следующие условия эквивалентны:

а) $\inf B\theta_1 = \inf \theta_1 B A^q$, $\forall q > 0$;

б) $\inf B\theta_1 = B\theta_1(0,1) = \theta_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

с) $w + v \geq u$, $u \leq 0$.

Так как $w + v = 0$ и $u = 0{,}5$, то есть условия с) не выполняются, следовательно, и условия а) и б) также не выполнимы.

5. К нашему $\theta_1 = \dfrac{l}{-k + 0{,}5}$ применим лемму 1. В этой лемме полагая

$r \leq \inf\limits_{\mathrm{P}} (k + l)$. Согласно определению экспоненциальной пары $0 \leq k \leq \frac{1}{2} \leq l \leq 1$.

Следовательно, $l+k \geq \frac{1}{2}$. Тогда $\inf(k+l) \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что одним из значений r в лемме 1 можно взять $r = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$Y = \max(wr+v-u,\, w+v-u) = \max(r+0-0{,}5,\ 1+0-0{,}5) = 0{,}5;$$

$$Z = \min(wr+v-u,\, w+v-u) = r-0{,}5.$$

Поэтому, так как $Z \geq 0$, то согласно утверждению леммы 1

$$\inf\theta_1 = \inf\theta_1 A.$$

6. Так как $\inf\theta_1 = \inf\theta_1 A$, заменяем $\xi(\theta_1)$ на $\xi(\theta_1 A)$ и находим

$$\theta_1 A = \frac{\dfrac{k+l+1}{2k+2}}{-\dfrac{k}{2k+2}+\dfrac{1}{2}} = \frac{k+l+1}{-k+k+1} = k+l+1.$$

Таким образом,

$$\inf\theta_1 = \inf\theta_1 A = \inf(k+l)+1.$$

Число $\inf(k+l)$ играет важную роль в алгоритме определения оптимальных экспоненциальных пар. Это число называется постоянной Ранкина [6] и обозначается через R.

Постоянная Ранкина вычисляется, как предел последовательности $A^{q_1}BA^{q_2}B\ldots A^{q_k}B\ldots$, где первые 50 членов q – последовательности имеют вид

13211 21122 12221 21122 11213 21112 11132 11132 11221 11122.

Результатом применения этих членов будет число

$$R = 0{,}82902135685913359240923977728311205098343270 3+8\times10^{-43}.$$

Таким образом,

$$\inf\theta_1 = R+1.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt. Rend. Acad.Sci 1914. v.158. - P.1012–1014.
2. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Z. 1921. Bd 10. - S. 283–317.
3. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана. – Acta arith., 1976, 31. - S. 31–43.
4. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. т. 157. - С. 49–63.
5. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН РТ, 2006, т. 49, 5. – С. 393–400.
6. Graham S.W. Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums. Cambridge university press. 1991, Cambridge, New Vork, Port Chester, Melbourne, Sydney.

ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА И ЕЁ НУЛИ

В статье отражается использование метода оптимизации пар экспоненциальной длины отрезка критической прямой линии, имеющих нуль в порядке нечетности дзета-функции Римана, через константы Римана.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оптимизация, экспоненциальная пара, критическая прямая, константа Римана, линейное преобразование, проективное пространство, отождествление, матрица.

THE ZETA FUNCTION OF RIEMANN AND ITS ZEROS

The article reflects the use of optimization method of exponential pairs of cut lengths of the critical straight line with zero in the order of odd Zeta-function of Riemann, through Riemann's constants.

KEY WORDS: optimization, exponential pair, critical straight, the Riemann constant, a linear transformation, projective space, identification, matrix.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич, кандидат физико-математических наук, ученый секретарь, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан. Тел.: (+992) 919-14-00-26.

УДК 517.946

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОБОБЩЁННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО РОДА

Гаюров А.Т.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава
(представлена профессором Дж.С. Сафаровым)

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим уравнение обобщённых аналитических функций [1]

$$w_{\bar{z}} + a(z)w(z) + b(z)\overline{w(z)} = 0, \tag{1}$$

где $a(z), b(z) -$ заданные функции на плоскости $\mathbb{C}$.

Задачи существования и нахождения двоякопериодических решений уравнений (1) с заданными периодами h_1, h_2, $\operatorname{Im}(h_2 / h_1) \neq 0$ исследовано в [2] и дано некоторые их приложения.

Здесь будем исследовать задачи существования и нахождения двоякопериодических решений второго рода с основными периодами h_1, h_2, $\operatorname{Im}(h_2 / h_1) \neq 0$ для уравнения (1), то есть решения, удовлетворяющие условиям

$$w(z + h_1) = \alpha_1 w(z), \; w(z + h_2) = \alpha_2 w(z). \tag{2}$$

$\alpha_1, \alpha_2 -$ постоянные множители, $\alpha_1 \neq 1, \alpha_2 \neq 1$.

Задача (1), (2) всегда имеет тривиальное решение $w(z) \equiv 0$.

Лемма 1. *Для того, чтобы уравнение (1) имело двоякопериодическое решение второго рода с периодами h_1, h_2 необходимо, чтобы коэффициенты $a(z), b(z)$ удовлетворяли условиям*

$$a(z + h_j) = a(z), \; b(z + h_j) = \frac{\alpha_j}{\overline{\alpha_i}} b(z), \; j = 1,2. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $w(z) -$ ненулевое решение задачи (1), (2). Тогда заменяя в уравнении (1) переменное z на $z + h_j, j = 1,2$, и учитывая условия (2) наряду с уравнением (1) получим уравнение вида

$$w_{\bar{z}}\alpha_j + a(z + h_j)w(z) + b(z + h_j)\overline{\alpha_j}\,\overline{w(z)} = 0.$$

Теперь разделяя обе части этого уравнения на α_j вычитая из уравнении (1) получим

$$\left[a(z) - a(z + h_j)\right]w(z) + \left[\left(b(z) - b(z + h_j)\frac{\overline{\alpha_j}}{\alpha_j}\right)\right]\overline{w(z)} = 0.$$

Чтобы последнее уравнение относительно $w(z)$ выполнялось тождественно, необходимо, чтобы $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяли условия (2).

В дальнейшем требуется, чтобы $a(z)$ и $b(z)$ удовлетворяли условия (2) и принадлежали классу $L_p(\overline{\Omega})$, где $\Omega -$ основной параллелограмм решетки $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2,\ m_1, m_2 - \textit{целые числа}\}$, с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

Решение задачи (1), (2) понимается как в обобщённом, так и в регулярном смысле Векуа И.Н. [1].

Обозначим, как в [3], через $\overset{*}{W}{}^1_{p,r} -$ класс двоякопериодических обобщённых решений уравнения (1) с периодами h_1, h_2, и допускающих полюсы в $r \geq 1$ точках основного параллелограмма Ω решетки $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2,\ m_1, m_2 - \textit{целые}\}$, с учетом их кратности. При $r = 0$ получим пространство Соболева $\overset{*}{W}{}^1_p, p > 2 -$ двоякопериодических функций класса $W^1_p(\Omega)$. Через $L^*_p, p > 2 -$ обозначим класс двоякопериодических функций с периодами h_1, h_2 и принадлежащих в $L_p(\overline{\Omega})$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение вида

$$\varphi_{\bar{z}} + a(z)\varphi(z) = 0, \tag{4}$$

решения которой удовлетворяет условию (2), где $a(z) \in L^*_p, p > 2$.

Все решения задачи (2), (4) с заданными полюсами, а также с заданными нулями и полюсами построены в работе [3, 4].

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1), $a(z) \in L^*_p, b(z)$ удовлетворяет условию (2) и $b(z) \in L_p(\overline{\Omega}), p > 2$. Тогда любое обобщённое решение задачи (1), (2) допускающие в области Ω полюсы, с учетом их кратности, представимо в виде*

$$w(z) = u(z)\upsilon(z), \tag{5}$$

где $u(z) -$ обобщённое решение задачи (2), (4) а $\upsilon(z) -$ регулярное решение, то есть $\upsilon(z) \in \overset{*}{W}{}^1_p$, $p > 2$, уравнения вида

$$\upsilon_{\bar{z}} + b(z)\frac{\overline{u(z)}}{u(z)}\upsilon(z) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $w(z) -$ обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяющее условий (2), и допускающее полюсы (или нули и полюсы) внутри основного параллелограмма Ω решетки Γ.

Как известно [1] множество особых точек решения (1) совпадают с множеством особых точек некоторой однозначной аналитической функцией. С другой стороны, любое обобщенное решение задачи (2), (4) можно представить в виде [3]

$$u(z) = \Phi(z)e^{-\mathrm{T}_\zeta a}, \tag{7}$$

где $\mathrm{T}_\zeta a -$ несобственный двойной интеграл по области Ω

$$\mathrm{T}_\zeta a = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega a(z)\zeta(t - z)d_t\Omega,$$

здесь $\zeta(z) -$ дзета – функция Вейерштрасса, построенная на периодах h_1, h_2, $\mathrm{Im}(h_2 / h_1) > 0$, а эллиптическая функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям

$$e^{-\eta_j a_0}\Phi(z),\ j=1,2. \tag{8}$$

Функция $g(z)=\mathrm{T}_\zeta a(z)$, при $a(z)\in L_p^*$, $p>2$, как показано в [3], является решением неоднородного уравнения

$$g_{\bar z}=a(z)$$

и удовлетворяет условию

$$g(z+h_j)=g(z)+\eta_j a_0,$$

где $a_0=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega a(z)d\Omega$, η_1,η_2- циклические постоянные $\eta_j=2\zeta(h_j/2), j=1,2$,

вместе с периодами h_1,h_2 связаны соотношением Лежандра [2]

$$\eta_1 h_2-\eta_2 h_1=2\pi i. \tag{9}$$

Боле того [3]

$$\mathrm{T}_\zeta:\left\{\rho(z),\rho\in L_p^*,\ \iint\limits_\Omega \rho d\Omega=0\right\}\to \overset{*}{W}{}_p^1,\ p>2.$$

Теперь, как в [3], функцию $\Phi(z)$ представим в виде

$$\Phi(z)=\varphi(z)e^{-dz} \tag{10}$$

и постоянные a_0 и d подберем таким образом, чтобы удовлетворяли систему уравнений

$$e^{-dh_j-\eta_j a_0}=\alpha_j,\ j=1,2. \tag{11}$$

В силу соотношения Лежандра легко видеть систему уравнений (11) имеющее решение.

Следовательно, в представлении (10) $\varphi(z)-$ эллиптическая функция первого рода, то есть двоякопериодическая мероморфная функция, имеющая особые точки эллиптической функции второго рода $\Phi(z)$.

Пусть теперь все полюсы или нули и полюсы решения уравнения (1) $w(z)$ суть полюсы (нули и полюсы) решения задачи (2), (4), которое представимо в виде (7). Тогда отношение

$$w(z)/u(z)$$

является регулярной двоякопериодической функцией класса $\overset{*}{W}{}_p^1$, $p>2$ и функция

$$\upsilon(z)=w(z)/u(z), \tag{12}$$

является решением уравнения

$$\upsilon_{\bar z}+b_1(z)\overline{\upsilon}=0,\ b_1(z)=-b(z)\frac{\overline{u(z)}}{u(z)}.$$

Легко видеть, что $b_1(z)\in L_p^*,\ p>2$. В самом деле

$$b_1(z+h_j)=-b(z+h_j)\frac{\overline{u(z+h_j)}}{u(z+h_j)}=-\frac{\alpha_j}{\overline{\alpha}_j}b(z)\frac{\overline{\alpha_j u(z)}}{\alpha_j u(z)}=-b(z)\frac{\overline{u(z)}}{u(z)}=b_1(z),$$

то есть $b_1(z)-$ двоякопериодическая функция с периодами h_1,h_2, так как $|b_1(z)|=|b(z)|$, то $b_1(z)\in L_p^*,\ p>2$.

По заданным полюсам (или нулям и полюсам) решения уравнения (1) всегда можно построить обобщенное решение уравнения (4). Пусть такие решения уравнения (2) построены и $z_0 \in \Omega -$ некоторая точка, такая, что

$$w(z_0) = u(z_0). \tag{13}$$

Тогда в представлении (5) функция $\upsilon(z) -$ регулярное решение уравнения (6), то есть функция класса $\overset{*}{W}{}_p^1$, $p > 2$ и удовлетворяющая условию

$$\upsilon(z_0) = 1. \tag{14}$$

Все такие решения уравнения (6) построены в работе [3], через резольвенты некоторого интегрального уравнения Фредгольма, с помощью интегрировании ядер Коши.

Таким образом, если $z_0 -$ фиксированная точка Ω и $w(z_0) = u(z_0)$ и $u(z) -$ обобщенное решение задачи (2), (4), имеющие все особые точки решения уравнения (1), $w(z)$, то достаточно найти регулярное решение $\upsilon(z)$ уравнения (6), удовлетворяющее условию (14).

Разрешимость уравнения вида (5) вместе с условием (14), как (12) показано в [3], эквивалентно разрешимостью интегрального уравнения вида

$$\upsilon(z) + \mathrm{T}_\zeta\left(b_1 \overline{\upsilon}\right)_0 = 1, \ \iint_\Omega b_1(z)\overline{\upsilon(z)}d\Omega = 0, \tag{15}$$

где

$$\mathrm{T}_\zeta(\rho)_0 = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \rho(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t-z_0)]d_t\Omega.$$

Так как оператор $\mathrm{T}_\zeta \rho$ вполне непрерывный оператор, отображающий пространство L_p, $p > 2$ в пространстве Гёльдера с показателем $\alpha = \dfrac{p-2}{p}$, $p > 2$, то достаточно, доказать, что однородное уравнение (15) имеет только нулевое решение. Это утверждение в случае, когда $b_1(z) \in C_*^1$ или H_*^α, $0 < \alpha \le 1$ и $|b_1(z)| > 0$ всюду в Ω следует из леммы В.С. Виноградова [5].

Другое доказательство этого утверждения следует из формулы представления решения однородного уравнения [6]. Если $\upsilon_0(z) -$ решение однородного уравнения (15), то справедливо формула

$$\upsilon_0(z) = \begin{cases} c\exp\left[\mathrm{T}_\zeta\left(b_1\dfrac{\overline{\upsilon_0}}{\upsilon_0}\right) + dz\right], \ \textit{если } b_1^0 \in \Gamma, \\ 0, \quad \textit{если } b_1^0 \overline{\in} \Gamma, \end{cases}$$

здесь

$$b_1^0 = \frac{1}{\pi}\iint_\Omega b_1(t)\frac{\overline{\upsilon_0(t)}}{\upsilon_0(t)}d_t\Omega.$$

Таким образом, однородное уравнение (15) в классе $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, имеет только нулевое решение.

Решение неоднородного уравнения можно найти методом последовательных приближений, и оно представимо в виде [3], [6]

$$\upsilon(z) = 1 + \iint_\Omega S_1^\upsilon(t, z)d_t\Omega + \iint_\Omega S_2^\upsilon(t, z)d_t\Omega, \tag{16}$$

где $S_1(t,\ z),\ S_2(t,\ z)-$ резольвенты интегрального уравнения (15), которые обладают следующими свойствами

1) $S_1^{\upsilon}(t,\ z_0)=S_2^{\upsilon}(t,\ z_0)=0$;

2) $S_1^{\upsilon}(t,\ z+h)=S_1^{\upsilon}(t,\ z)-\dfrac{\eta}{\pi}\iint\limits_{\Omega} b_1(\tau)\overline{S_2(t,\ \tau)}d_t\Omega$;

3) $S_2(t,\ z+h)=S_2(t,\ z)-\dfrac{\eta}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\left[b_1(\tau)+\iint\limits_{\Omega}\overline{b}_1(t)\overline{S_2^{\upsilon}(t,\ \tau)}\right]d_t\Omega$,

где $h=m_1h_1+m_2h_2,\ \eta=m_1\eta_1+m_2\eta_2,\ \eta_1,\eta_2-$ циклические постоянные, m_1,m_2- целые числа.

4) $\dfrac{\partial S_1^{\upsilon}(t,\ z)}{\partial\overline{z}}==-b_1(z)\overline{S_2^{\upsilon}(t,\ z)}$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[S_2^{\upsilon}(t,\ z)-L_1^{\upsilon}(t,\ z)\right]=-b_1(z)\overline{S_1^{\upsilon}(t,\ z)},\ t\neq z,\ t\neq z_0,$$

где

$$L_1^{\upsilon}(t,\ z)=\frac{1}{\pi}b\frac{\overline{u}}{u}\left[\zeta(t-z)-\zeta(t-z_0)\right].$$

Из свойств (2) и (3) резольвенты следует, что для двоякопериодичности функции $\upsilon(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} b_1(t)\left[1+\iint\limits_{\Omega}\overline{S_1^{u}(t,\ \tau)}d_\tau\Omega+\iint\limits_{\Omega}\overline{S_2^{u}(t,\ \tau)}d_\tau\Omega\right]=0. \qquad (17)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $u(z)-$ *обобщенное решение задачи (2), (4) с полюсами* $b_1,b_2,...,b_r-$ *лежащие внутри основного параллелограмма* Ω *решетки* Γ *с учётом их кратности и* z_0- *фиксированная точка из* Ω. *Пусть* $\upsilon(z)\in\overset{*}{W}{}_p^1,\ p>2-$ *решение интегрального уравнения (15) и* $\upsilon(z_0)=1$, *то есть*

$$\upsilon(z)=1+\iint\limits_{\Omega}S_1^{u}(t,\ z)d_t\Omega+\iint\limits_{\Omega}S_2^{u}(t,\ t)d_t\Omega,$$

где $S_1^{u}(t,\ z),\ S_2^{u}(t,\ z)-$ *резольвенты и выполнено условие (17). Тогда любое обобщенное решение задачи (1), (2)* $w(z)$ *с заданными полюсами* $b_1,b_2,...,b_r$ *и принимающие в точки* $z=z_0$ $w(z_0)=u(z_0)$ *однозначно представляется в виде*

$$w(z)=\upsilon(z)\left[1+\iint\limits_{\Omega}S_1^{u}(t,\ z)d_t\Omega+\iint\limits_{\Omega}S_2^{u}(t,\ t)d_t\Omega\right].$$

ЛИТЕРАТУРА:

4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. - 690 с.
5. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. - 304 с.
6. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения. – Душанбе: Дониш, 2012. - 190 с.
7. Гаюров А.Т. Двоякопериодические обобщённые аналитические функции второго рода // Вестник ТНУ. – Душанбе: Сино, 2015. – № 2/(160). - С. 36.
8. Виноградов В.С. О теоремах Лиувилля для уравнения обобщенных аналитических функций // Ж. дифф. урав., 1980 г., т. XVI. - № 1. С. 42-46.

9. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции // Ж. дифф. уравнения, 1991 г., т. 27. - № 4. - С. 656-664.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОБОБЩЁННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО РОДА

В работе методом теории Векуа и эллиптических функций Вейерштрасса исследованы задачи существования и нахождения двоякопериодических обобщённых аналитических функций второго рода с периодами h_1, h_2, $\mathrm{Im}(h_2/h_1) \neq 0$ и с постоянными множителями.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнение, решение, двоякопериодическая функция, аналитическая функция.

DOUBLE PERIODIC OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS OF THE SECOND KINDS

In the method of Vekua and elliptic functions of Weierstrass theory is studied the problem of the existence and find doubly periodic generalized analytic functions of the second kind with periods, h_1, h_2, $\mathrm{Im}(h_2/h_1) \neq 0$ and with constant factors.

KEY WORDS: equation, solution, doubleperiodic function, analytical function.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Гаюров Акбарали Таварович, аспирант кафедры математического анализа КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 917-66-66-14.

УДК 511.325

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО МНОГОЧЛЕНА С АРГУМЕНТОМ ПРОБЕГАЮЩИЙ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ИЗ КОРОТКОГО ИНТЕРВАЛА

Исматов С.Н.
Таджикский национальный университет

Полученная в работах [1–4] нетривиальная оценка $V_K(x,y)$ – сумм коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами, позволила доказать теорему о законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,x]$ для более коротких интервалов и для всех иррациональных α и рациональных α с большими знаменателями.

Теорема. Пусть x, y и q – натуральные числа, $A \geq 3$ – абсолютная постоянная, $\mathrm{L} = \ln xq$, α – вещественное и

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q)=1, \quad |\theta| \leq 1, \quad \mathrm{L}^{4A+20} \leq q \leq \frac{y^2}{x}\mathrm{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ такие, что $x-y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, при $y >> x^{\frac{2}{3}}\mathrm{L}^{4A+16}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \frac{\sigma y}{\mathrm{L}} + O\left(\frac{y}{\mathrm{L}^2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады АН РТ, 2013, т. 56. - № 11. – С. 853 – 860.
2. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Исматов С.Н. Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады АН РТ, 2013, т. 56. -№ 12. - С. 937 – 945.
3. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады РАН, 2014, т. 459. - № 2. – С. 1 – 2.

4. Исматов С.Н. О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала // Вестник Таджикского национального университета. – Душанбе: Сино, 2015. - № ½ (160). – С. 27 – 30.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО МНОГОЧЛЕНА С АРГУМЕНТОМ ПРОБЕГАЮЩИЙ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ИЗ КОРОТКОГО ИНТЕРВАЛА

Для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$, $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $|\theta|\le 1$, $(a,q)=1$ такие, что $x-y<p\le x$ и $\{\alpha p\}<\sigma$, при $y>>x^{\frac{2}{3}}\mathrm{L}^{4A+16}$ и $\mathrm{L}^{4A+20}\le q\le\frac{y^2}{x}\mathrm{L}^{-4A-20}$, доказана асимптотическая формула.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: короткая тригонометрическая сумма, распределение дробных частей, асимптотическая формула, простое число.

THE DISTRIBUTION OF FRACTIONAL PARTS OF A LINEAR POLYNOMIAL WITH ARGUMENT RUNNING THROUGH THE PRIMES NUMBERS FROM A SHORT INTERVAL

An asymptotic formula was obtained for $F_\alpha(x,y,\sigma)$, where $F_\alpha(x,y,\sigma)$ denotes the number of terms in the sequence $\{\alpha p\}$, $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $|\theta|\le 1$, $(a,q)=1$, that satisfy $x-y<p\le x$ and $\{\alpha p\}<\sigma$ when $y>>x^{\frac{2}{3}}\mathrm{L}^{4A+16}$ and $\mathrm{L}^{4A+20}\le q\le\frac{y^2}{x}\mathrm{L}^{-4A-20}$.

KEY WORDS: Short trigonometrical sum, distribution of fractional parts, asymptotic formula, prime number.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Исматов Сайфулло Нематович, заведующий кафедрой методики преподавания математики и геометрии механико-математического факультета ТНУ. Тел.: (+992) 93-567-78-52; e-mail: saifullo@mail.ru

УДК. 517.946

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ n –ГО ПОРЯДКА

Саидназаров Р.С., Мухаммадали Дж.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида [1], [2], [3], [4]

$$\partial_{\bar z}^n w + a_1\partial_{\bar z}^{n-1}w+\cdots+a_{n-1}\partial_{\bar z}w+a_n w=0, \qquad (1)$$

где $z=x+iy, w=u+iv, 2\partial_{\bar z}=\partial_x+i\partial_y, \partial_{\bar z}^n=\partial_{\bar z}(\partial_{\bar z}^{n-1})$, коэффициенты $a_1,a_2,\cdots,a_n$ – суть постоянных чисел.

Решение уравнения (1) в некоторой области $D\subset\mathbb{C}$ называется метааналитической функции n –го порядка. Уравнение (1) включает в себе класс обобщенных аналитических функций, то есть случай $n=1$, бианалитических, то есть решение уравнения

$$w_{\bar z}^2=0$$

и полианалитических функций, то есть решение уравнения

$$w_{\bar z}^n=0, n>2.$$

Уравнение вида (1) изучено в работах Балка М. Б. и Зуева М. Ф. [1], Жигалева В. И. [3], Раджабова Н. и Расулова А. Б. [4], Расулова К. М. [5], его учеников и других

математиков. В этих работах исследованы качественные свойства решений, распространении свойства аналитических функций и связанных с ними краевые задачи, типа Римана-Гильберта, Карлемана, Газемана, а также изучении классических и неклассических граничных задачах.

В данной работе будем исследовать задачи существования и нахождения двоякопериодических функций, с основными периодами $h_1, h_2, Im(h_2/h_1) > 0$, допускающие полюсы и нули в любом параллелограмме Ω решетки $\Gamma = \{z_0 + m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 \ -$ целые числа$\}$, z_0 –произвольная точка плоскости, как у эллиптических функций [6].

Класс таких решений уравнения (1) обозначим через $\tilde{C}_*^n$. Когда множество полюсов решения пустое множество, то класс таких решений обозначим через C_*^n и будем их называть регулярными решениями.

Задачи существования и нахождения двоякопериодических решений для уравнения (1) в случае $n = 1, n = 2, n = 3$ исследована в работах Сафарова Д. С. [7], Показеева В. И. и Сафарова Д. С. [8], Байзаева С. [9], Сафарова Д. С. и Саидназарова Р. С. [10,11,12]. Для бианалитических функций эта задача изучена в работах Натанзона В.Я.[13] и Ф. Эрве [15], а в случае $n \geq 2$ для уравнения полианалитических функций изучено в работе Показаева В. В. [14]. Найден аналог формулы Эрмита.

Задачи нахождения решения уравнения (1) в классе регулярных двоякопериодических решений изучено в работе [7].

Структура многообразия решения системы (1) зависит от свойства корней так называемого характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{2}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ –различные корни характеристического уравнения (2)

1. Решение (1) с заданными полюсами.

Пусть обобщенное двоякопериодическое решение уравнения (1) класса $\tilde{C}_*^n$ допускает полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$ с кратностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$, и лежащие внутри основного параллелограмма Ω решётки Γ.

Теорема 1. *Пусть все различные корни уравнения (2) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$. Тогда, если существует эллиптическая функция $\varphi(z)$ с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$, то есть*

$$\sum_{k=1}^{r} \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = 0, \tag{3}$$

то решение уравнения (1) класса $\tilde{C}_*^n$ представляется в виде

$$w(z) = \varphi(z) \sum_{k=1}^{n} c_k \, exp\left(\lambda_k \bar{z} - \bar{\lambda}_k z\right), \tag{4}$$

где c_k – постоянные, $\varphi(z)$ имеет вид

$$\varphi(z) = c + \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{\nu_k} c_k^j \, \zeta^{(j-1)}(z - b_k), \tag{5}$$

c, c_n^j –постоянные, ν_k –кратность полюса b_k, причем

$$\sum_{k=1}^{r} c_k^1 = 0, \ \underset{z=b_k}{Res}\, \varphi(z) = c_k^1.$$

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы. Тогда при условии $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Gamma_1$ любое решение уравнения (1) из класса $\tilde{C}_*^n$ представимо в виде [16]

$$w(z) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k e^{\lambda_k \bar{z}}, \tag{6}$$

где $\Phi_k(z)$ −двоякопериодические аналитические функции второго рода [6], удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k(z+h_j) = e^{-\lambda_k \bar{h}_j}\Phi_k(z), \qquad j = 1,2;\ \ k = 1,2,\dots,n,$$

имеющие полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$, внутри области Ω.

Пусть существует эллиптическая функция $\varphi(z)$ с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$, то есть [6]

$$\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=b_k} \varphi(z) = 0,$$

$\varphi(z)$ −имеет вид (5), где $c_k^1 = \operatorname{Res}\varphi(z)$.

Эллиптическую функцию второго рода $\Phi_k(z)$ − можно представить в виде [7]

$$\Phi_k(z) = \varphi(z)e^{d_k z}\gamma_k(z), \tag{7}$$

здесь $d_k, \gamma_k(z)$ −пока искомые.

Постоянное d_k в силу условия $\lambda_k \in \Gamma_1$ определим из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \lambda_k \bar{h}_1 + d_k h_1 = 2\pi i m_1 \\ \lambda_k \bar{h}_2 + d_k h_2 = 2\pi i n_2 \end{aligned}\right\}$$

где n_1, n_2 −некоторые целые числа, которые в силу условия $Im(h_2/h_1) > 0$ имеют единственное решение

$$\lambda_k = \frac{\pi}{|\Omega|}(n_1 h_2 - n_2 h_1), d_k = -\frac{\pi}{|\Omega|}\left(n_1 \bar{h}_2 - n_2 \bar{h}_1\right).$$

Таким образом, $d_k = -\bar{\lambda}_k$ и

$$\frac{\Phi_k(z)}{\varphi(z)\exp(d_k z)} = \gamma_k(z)$$

является регулярной двоякопериодической функцией.

Следовательно, в представлении (7) $\gamma_k(z) \in C_*^1$, является функцией аналитической, ограниченной на всей плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому в силу теоремы [6], Лиувилля $\gamma_k(z) \equiv c_k, c_k$ − постоянные.

Таким образом, эллиптические функции второго рода, $\Phi_k(z)$ представимы в виде

$$\Phi_k(z) = \varphi(z)c_k e^{d_k z}, d_k = -\bar{\lambda}_k.$$

Подставляя эти значения $\Phi_k(z)$ в (6), получим представление (4).

Замечание. Условие существования эллиптической функции с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$ является необходимым условием, что следует из представления решений уравнения (1) при $\lambda_k \in \Gamma_1, k = 1,2 \dots, n$. Если корни уравнения (2) кратные, то это не так [14].

Например, решения уравнения (1) с одним простым полюсом при условии, что все $\lambda_k \in \Gamma_1, k = 1,2,\dots,n$, не существует, так как порядок эллиптической функции всегда $r > 1$.

Теорема 2. *Пусть среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ хотя бы одно значение $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_1, 1 \le j \le m$. Тогда уравнение (1) в классе $\tilde{C}_*^n$ всегда допускает решение с заданными полюсами.*

При этом 1) при $\lambda_k - \lambda_j \overline{\in} \Gamma_1\ \ k \ne j, k = 1,2,\dots,m$ имеет решение вида

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z), \tag{8}$$

где $z_j^1 - z_j^0 = \frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j$, постоянные величины d_j удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} d_j h_1 + \left(z_j^1 - z_j^0\right)\eta_1 = -\lambda_j \bar{h}_1 \\ d_j h_2 + \left(z_j^1 - z_j^0\right)\eta_2 = -\lambda_j \bar{h}_2 \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Эллиптическая функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = c + d\zeta\left(z - z_j^0\right) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(z - b_k) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=2}^{\nu_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}(z - b_k), \quad (10)$$

где постоянные величины $c, d, A_k, A_k^{(l-1)}$ *связаны условиями*

$$d + \sum_{k=1}^{r} A_k = 0,$$

$$c + d\zeta\left(z_j^1 - z_j^0\right) + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta\left(z_j^1 - b_k\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=2}^{\nu_k} A_k^{(l-1)} \wp^{(l-2)}\left(z_j^1 - b_k\right) = 0\,, \quad (11)$$

причём $z_j^1 - b_k \overline{\in} \Gamma, k = 1,2,\dots,r,$

2) при $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1$ $k \neq j, k = 1,2,\dots,m;$ $\lambda_k - \lambda_j \in \Gamma_1, k \neq j, k = 1,2,\dots,m,$ *имеет решение вида*

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z) \left(c_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k e^{\tilde{\lambda}_k \bar{z} - \bar{\tilde{\lambda}}_k z} \right),$$

где c_k *–постоянные величины,* $\tilde{\lambda}_k = \left(\lambda_k - \lambda_j\right)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – различные корни характеристического уравнения (1). Тогда, как и выше, любое решение (1) $w(z)$ класса $\tilde{C}_*^n$ представимо в виде (6), в котором $\Phi_k(z)$ –эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_k(z + h_i) = e^{-\lambda_k \bar{h}_i} \Phi_k(z), i = 1,2.$$

Если $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_1$ при $k = j$, $1 \leq j \leq n$, тогда, как в [6] функцию $\Phi_j(z)$ можно представить в виде

$$\Phi_j(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z} F(z) \gamma_j(z), \quad (12)$$

где $z_j^0, z_j^1 \overline{\in} \Gamma, z_j^1 - z_j^0$ и d_j находятся из системы уравнений (8), а $F(z)$ –эллиптическая функция с полюсами в точках $b_1, b_2, \dots, b_r$ и z_j^0 и простым нулем в точках $z = z_j^1$, имеющая вид (10), в котором входящие постоянные связаны условиями (3.3.8'), причем $z_j^1 - b_k \overline{\in} \Gamma$, $k = 1,2,\dots,r$. Тогда в представлении (12) $\gamma_j(z)$ является двоякопериодической аналитической функцией порядка нуль, в силу теоремы Лиувилля [6], $\gamma_j(z) \equiv c_j, c_j$ –постоянные.

Теперь полагаем в (6)

$$\Phi_k(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z} F(z) \gamma_k(z), k \neq j, k = 1,2,\dots,m,$$

где $\gamma_k(z)$ –регулярные двоякопериодические аналитические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_k(z + h_i) = e^{-(\lambda_k - \lambda_j)\bar{h}_i} \gamma_k(z), i = 1,2;\ k \neq j. \quad (13)$$

Тогда решение уравнения (1) при $\lambda_j \overline{\in} \Gamma_1$ с полюсами $b_1, b_2, \dots, b_r$ представляется в виде

$$w(z) = \frac{\sigma\left(z - z_j^0\right)}{\sigma\left(z - z_j^1\right)} e^{d_j z + \lambda_j \bar{z}} F(z) \left(c_j + \psi(z)\right), \quad (14)$$

где

$$\psi(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{m} \gamma_k e^{(\lambda_k - \lambda_j)\bar{z}}$$

и $\gamma_k -$ регулярные двоякопериодические аналитические функции второго рода, удовлетворяющие условию (12). Тогда в силу результатов работ [7] в обозначениях $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - \lambda_j$ имеем

$$\gamma_k(z) = \begin{cases} c_k e^{-\bar{\tilde{\lambda}}_k z}, \text{если } \tilde{\lambda}_k \in \Gamma_1, \\ 0, \quad \text{если } \tilde{\lambda}_k \overline{\in} \Gamma_1, \end{cases} \tag{15}$$

где c_k –произвольная постоянная.

Теперь, подставляя (15) в (14) , получаем утверждение теоремы.

1. Решение с заданными нулями и полюсами.

Теорема 3. *Пусть N и P соответственно числа нулей и полюсов решения уравнения (1), лежащих внутри параллелограмма Ω. Тогда необходимо, чтобы $N = P$.*

Теорема 4. (обобщенная теорема Абеля) *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n -$ различные корни характеристического уравнения (2) и $b_1, b_2, \dots, b_r -$ полюсы и $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ –нули решения, лежащие внутри параллелограмма Ω решётки*
Γ ={$m_1 h_1 + m_2 h_2$; m_1, m_2 –целые числа}. Тогда для существования решения уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из условий

$$\sum_{k=1}^{r} (b_k - \tilde{a}_k) \equiv -\frac{|\Omega|}{\pi} \lambda_j (mod\Gamma), \qquad j = 1,2,..,n,$$

$$|\Omega| = mes\Omega = |h_1|^2 Im(h_2/h_1). \tag{16}$$

Доказательства теорем 3 и 4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ –корни уравнения (2). Тогда всякое обобщенное решение уравнения (1) из класса $\tilde{C}_*^n$ представимо в виде [16]

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(z) e^{\lambda_j \bar{z}}, \tag{17}$$

где $\Phi_j(z)$ –эллиптические функции второго рода, удовлетворяющие условиям

$$\Phi_j(z + h_k) = e^{-\lambda_j \bar{h}_k} \Phi_j(z), \qquad k = 1,2;\ j = 1,2, \dots, m\,. \tag{18}$$

Функция $\Phi_j(z)$ имеет все полюсы и нули решения $w(z)$. Отношение

$$\psi_j(z) = \frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)}$$

является эллиптической функцией. Поэтому, в силу теоремы теории эллиптических функций число полюсов и нулей для эллиптической функции $\psi_j(z)$ совпадает, то есть $N = P$ [6]

Докажем формулу (16). Действительно, в силу теоремы Коши [6]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} z \frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)} dz = b_1 + b_2 + \dots + b_r - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 - \dots - \tilde{a}_r,$$

где b_j –полюсы, $\tilde{a}_j -$ нули функции $\Phi_j(z)$ внутри параллелограмма Ω. С другой стороны, в силу условия периодичности отношения $\Phi_j'(z)/\Phi_j(z)$ и условия (18) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} z \frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[h_1 \int_0^{h_2} \frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)} dz - h_2 \int_0^{h_1} \frac{\Phi_j'(z)}{\Phi_j(z)} dz \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \left[h_1 \int_0^{h_2} d \ln \Phi_j(z) - h_2 \int_0^{h_1} d \ln \Phi_j(z) \right] = \frac{h_1}{2\pi i} \left[-\lambda_j \bar{h}_2 + 2\pi k_1 i \right] -$$

$$-\frac{h_2}{2\pi i}\left[-\lambda_j\bar{h}_1+2\pi k_2 i\right]=-\frac{\lambda_j}{2\pi i}\left[h_1\bar{h}_2-h_2\bar{h}_1\right]+k_1h_1-k_2h_2=$$
$$=-\frac{|h_1|^2 Im(h_2/h_1)}{\pi}\lambda_j+k_1h_1-k_2h_2=-\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j+k_1h_1-k_2h_2,$$
где k_1, k_2 −некоторые целые числа. Отсюда следует утверждение теоремы
$$\sum_{k=1}^{r}(b_k-\tilde{a}_k)\equiv-\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j(mod\Gamma), \tag{19}$$
здесь λ_j −произвольный корень характеристического уравнения. Нужно отметить, что в последнем равенстве при $\frac{|\Omega|}{\pi}\lambda_j\in\Gamma$ или $\lambda_j\in\Gamma_1$ надо считать, что $r>1$, а при $\lambda_j\,\overline{\in}\,\Gamma_1$, $r\geq 2$.

Теперь проверим следующее утверждение: если последнее равенство (19) выполняется хотя бы для одного корня λ_j −характеристического уравнения, то уравнение (1) имеет решение с заданными нулями и полюсами.

В самом деле, при выполнении условия (19) в силу свойства сигма -функций Вейерштрасса $\sigma(z)$ и соотношение Лежандра функция [7]
$$\psi_j(z)=\prod_{k=1}^{r}\frac{\sigma(z-a_k)}{\sigma(z-b_k)}e^{d_j z}$$
имеет полюсы $b_1, b_2, \dots, b_r$, нули $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_r$ и удовлетворяет условию (18), постоянные d_j −определяются из условия
$$exp\left(d_j h_k+\eta_k A_0\right)=exp\left(-\lambda_j\bar{h}_k\right)\quad k=1,2,$$
где $A_0=b_1+b_2+\dots+b_r-\tilde{a}_1-\tilde{a}_2-\dots-\tilde{a}_r,\ \eta_k=\zeta\left(\frac{h_k}{2}\right), k=1,2.$

Следовательно, функция
$$\frac{\Phi_j(z)}{\psi_j(z)}$$
является эллиптической функцией нулевого порядка. Поэтому, в силу теоремы Лиувилля [6]
$$\Phi_j(z)=c_j\psi_j(z).$$
Теперь, при доказательстве теоремы, полагаем в равенстве (17)
$$\Phi_k(z)=\psi_j(z)e^{-\lambda_j\bar{z}}\gamma_k(z), k\neq j, k=1,2,\dots,n.$$
Тогда решение уравнения (1) пишется в виде
$$w(z)=\psi_j(z)e^{\lambda_j\bar{z}}\left[c_j+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\gamma_k(z)e^{(\lambda_k-\lambda_j)\bar{z}}\right], \tag{20}$$
где функции $\gamma_k(z)$ −регулярные двоякопериодические аналитические функции второго рода (без полюсов), удовлетворяющие условию
$$\gamma_k(z+h_i)=e^{-(\lambda_k-\lambda_j)\bar{h}_i}\gamma_k(z),\qquad i=1,2.$$
Как при доказательстве теоремы (4), из последнего равенства находим $\gamma_k(z)$:
$$\gamma_k(z)=\begin{cases}c_k\exp(\overline{\lambda_k-\lambda_j})z & \text{если } \lambda_k-\lambda_j\in\Gamma_1,\\ 0 & \text{если } \lambda_k-\lambda_j\,\overline{\in}\,\Gamma_1, .k\neq j\end{cases}$$
где c_k − постоянная величина.

Подставляя эти значения $\gamma_k(z)$ в зависимости от $\lambda_k-\lambda_j\in\Gamma_1$ или $\lambda_k-\lambda_j\,\overline{\in}\,\Gamma_1$, мы получим решение уравнения (1) в виде (20). Причем если все $\lambda_k-\lambda_j\,\overline{\in}\,\Gamma_1 k\neq j$, то уравнение имеет решение вида
$$w(z)=c_j\psi_j(z)e^{\lambda_j\bar{z}},$$
c_j −произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Балк М.Б. Зуев М.Ф. В сб: Мат. научной конф. Смоленского пед. ин-та, посвященной 50-летию института. - Смоленск, 1971. – С. 250-251.
2. Балк М.Б. Зуев М.Ф. – УМН, 1970, т.50. – С. 203.
3. Жигалев В.И. Тр. семинара по краевым задачам. - Казань: Изд-во КГУ,1975, вып 12. – С. 50-57.
4. Раджабов Н.Р. Расулов А.Б. Интегральные представление и граничные задача для одного класса систем дифференциальных уравнений высшего порядка // ДАН СССР, Т. 282, М 4, 1985. – С. 795-799.
5. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций [Текст] / К.М. Расулов // Смол. ун-т: из – во СГПУ, 1998. - 344 с.
6. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. - М.: Наука, 1970. – 304 с.
7. Сафаров Д.С. Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения. – Душанбе: Ирфон, 2012. - 190 с.
8. Показеев В.И. Простые обобщённые аналитические функции, автоморфные относительно элементарных групп. 1. Двоякопериодические решения / В.И. Показеев, Д.С. Сафаров // Изв. АН РТ, отд. физ. мат и хим. н.– 1992. т/ 4(4). – С. 15-21.
9. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости [Текст] / С. Байзаев. - Новосибирск: Препринт, 1999. – 74 с.
10. Сафаров Д.С., Саидназаров Р.С. Материалы международной конференции «Научно-практическая конференция Европа-2012». – Прага. - С. 17-21.
11. Саидназаров Р.С. О многообразии двоякопериодических решений одной эллиптической системы дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник КТГУ имени Носира Хусрава (научный журнал). Курган-Тюбе: Матбаа, 2014. - №1(27). – С. 3-9.
12. Саидназаров Р.С. Обобщенные двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем второго порядка [Текст] / Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров // ДАН РТ, 2013, т. 56. - №10. - С. 779-788.
13. Натанзон В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластине, ослабленной отверстиями, расположенными в шахматном порядке [Текст] / В.Я. Натанзон // Матем. сборник, 1935. – 42, вып. 5. – С. 617-636.
14. Показеев В.В. Полианалитические двоякопериодические функции [Текст] / В.В. Показеев. // Тр. сем. покраев. задачам. Из-во Казанского ун-та, 1982. - вып. 18. - С. 155 – 167.
15. Erwe F. Ubergewisse Klasson doppelt periodischer Funktionen / F. Erwe //Acta Math. 97 (1957), 145 – 187.
16. Саидназаров Р.С. Двоякопериодические решения одного класса эллиптических систем высокого порядка [Текст] / Д.С. Сафаров, Р.С. Саидназаров // ДАН РТ, 2014, т. 57. - №5. - С. 363-370.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ n –ПОРЯДКА

В статье показаны методы нахождения двоякопериодических решений для одного класса систем эллиптических функций n- порядка.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: функция, решения, двоякопериодическая функция, эллиптическая функция, изучение.

DOUBLY PERIODIC SOLUTION OF THE EQUATION METAANALYTIC FUNCTIONS OF n-TH ORDER

The paper shows the methods of finding doubly periodic solutions for a class of elliptic systems of n-th order with the help of elliptic functions.

KEY WORDS: function, solution, double periodic function, elliptic function, study.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Саидназаров Рахмонали Сангиллоевич, преподаватель кафедры высшей математики КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 919-67-67-50.

Мухаммадали Джурамурод, соискатель КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 558-059-276.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ЧИСЛЕННОСТИ ХИЩНИКОВ ЭКОСИСТЕМ РЕГИОНАЛЬНЫХ ЗАПОВЕДНИКОВ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

Юнуси М.К, Одинаева С.А.
Таджикский национальный университет
Махмадалиев Х.С., Гулов С.Х.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носири Хусрав

Известно, что разработка методов охраны ценных биологических видов требует прогноза динамики биологических популяций, сообществ и экосистем, при тех или иных антропогенных воздействиях. При этом, эксперименты на реальных системах весьма дороги, продолжительны и часто недопустимы, поэтому возникает необходимость разработки различного рода математических моделей [1-17]. При помощи математических моделей стало возможным экспериментальное изучение последствий тех или иных планируемых мероприятий, затрагивающих функционирование природных систем, прямые эксперименты с которыми недопустимы.

Следует отметить, что впервые математическую постановку задачи охраны для широкого класса экосистем с учетом временно-возрастного-пространственного распределения были предложены и обоснованы профессором Юнуси [4-17] и найдены необходимые и достаточные условия существования решения задачи охраны. Эта задача предусматривает и определяет желаемые диапазоны изменения численности всех видов входящих в экосистему. Для конкретного заповедника («Тигровая балка», «Дашти-Джум», «Рамит» и ряда других) выявлены его устойчивые и неустойчивые структуры для которых затем сформулирована и решена задачи охраны. Результаты типа «максимально агрегированная экологическая система» типа «растительность, травоядные животные, хищники» качественно устойчиво применены для экосистем любого заповедника нашей страны, что характерно для всех биологических систем. Сформулированые и обоснованые ранее результаты по математическим постановкам задач, связанные с охраной редкого вида экосистем рассмотренных заповедников перенесены на задачи оценки численности хищников. Построена вычислительная модель расчета численности хищников и определения элементов матрицы взаимодействия на основе натурных наблюдений. При изучении состояния экосистем заповедников и его моделирования первостепенную роль имеет исследование «устойчивых структур» биологических сообществ заповедника. Для этой цели применяются методы теории качественной устойчивости экосистем.

Структура взаимодействий экосистем заповедников. Как известно, структура взаимодействий биологических видов входящие в экологическую систему любого заповедника можно определить по следующей схеме (по Юнуси):

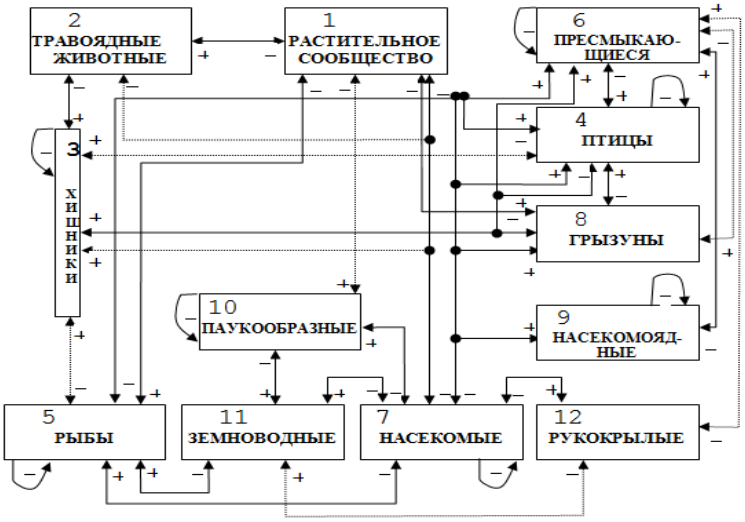


Рис. 1. Структура взаимодействий экосистем заповедников.

Для построения математических моделей биологических видов экосистем, входящие в заповедников необходимо прежде всего выявить устойчивые и неустойчивые структуры заповедника с помощью математических методов. Одним из них является метод качественной устойчивости, впервые использование в экономике, а затем примененные в экологических задачах. Понятие качественной устойчивости, введенное в литературу по математической экологии американским ученым Р. Мэйем, означает сохранение устойчивости при любых качественных вариациях связей между элементами системы, сохраняющими неизменным лишь тип отношений между каждой парой элементов. Исследованию структур заповедника на основе критерия качественной устойчивости посвящены многочисленные работы (Логофет, Юнуси [4], Юнуси, Асимова [6] и др.). Мы будем рассматривать структуру взаимодействия компонентов тугайно-пустынной экосистемы заповедников («Тигровая балка», «Дашти-Джум», «Рамит» и ряда других). Основу тугая экосистем «Тигровая балка» и «Дашти-Джум» составляют растительные сообщества, разнообразные парнокопытные млекопитающие, хищники, паукообразные, пресмыкающиеся, рыбы, насекомоядные, земноводные и другие (рис. 1). Паукообразные, пресмыкающиеся и рыбы являются самолимитированными видами, причем паукообразные живут за счет насекомых и иногда за счет растений. Пресмыкающиеся питаются птицами, грызунами, земноводными, а некоторые насекомые являются пищей для рыб. Приведем примеры качественно-устойчивых и неустойчивых структур экосистемы заповедника в случаях трехуровненной, четырехуровненной и многоуровненной системы. На рис. 2 рассмотрена агрегированная экосистема заповедников, включающая виды на трех основных уровнях: растительность, консументы первого порядка и консументы второго порядка. Из графа видно, что она не является качественно-устойчивой. На рис. 3 рассмотрены экосистемы заповедников («Тигровая балка», «Дашти-Джум», «Рамит» и ряда других), агрегированная по некоторым трофическим уровням. Основная особенность этой системы состоит в том, что критерии качественной устойчивости нарушается из-за наличия замкнутых ориентированных циклов длиною более чем 2. Отсутствие качественной устойчивости означает лишь то, что сообщество не может сохранять стабильность при любых вариациях его интенсивностей внутри- и межвидовых связей. Однако, вполне могут существовать структуры, выделенные из рассмотренной экосистемы, которые обладают качественной устойчивостью. Например, если удалить все штриховые временные связи и предполагать, что вид 5 питается только видами 3, то мы получим качественно-устойчивую структуру.

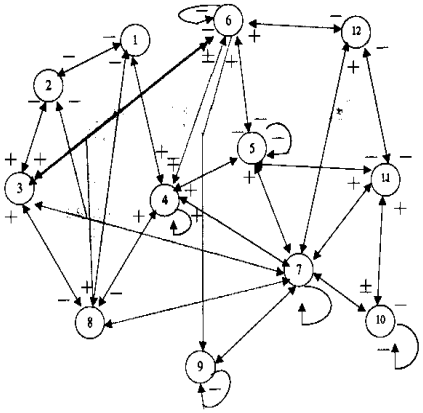


Рис.2. Знак ориентированные графы для экосистем заповедников.

Постановка задачи охраны популяций - задача Юнуси. Рассмотрим теперь постановку и решения задач охраны модельных популяций и экосистем заповедников в потановке предложенной и обоснованной в работе [21].

Задается желаемый диапазон изменения численности «редкого» вида (или видов), а для остальных видов экосистемы находятся границы диапазона изменения их численности, так чтобы численность популяции «редкого» вида находилась в соответствующих заданных диапазонах.

Будем рассматривать задачу охраны в случаях, когда экосистема находится в стационарном и нестационарном режимах, и когда в популяциях учитываются их возраст и пространственные распределения.

Стационарная задача охраны популяций. Следуя работе [21], рассмотрим модельную экосистему, имеющую три трофических уровня, в которую извне поступает ресурс - N_0 со скоростью Q. В общем случае суммарные биомассы (или численности) видов, принадлежащих соответствующим трофическим уровням (N_i, $i=1,2,3$), в равновесном режиме удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} Q + F_0(N_0, N_1) = 0, \\ N_1 \cdot F_1(N_0, N_1, N_2) = 0, \\ N_2 \cdot F_2(N_1, N_2, N_3) = 0, \\ N_3 \cdot F_3(N_2, N_3) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $F_i=F_i(.)$, $i=\overline{0,3}$ удельные скорости i-го трофического уровня, причем

$$\frac{\partial F_i}{\partial N_i} \le 0; \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} \le 0 \quad \text{когда} \quad i \le j; \quad \frac{\partial F_i}{\partial N_j} \ge 0 \quad \text{когда} \quad i > j. \tag{2}$$

Предполагается, что $N_i^{\min}$, $N_i^{\max}$ – желаемые диапазоны изменения численности i-го вида модельной экосистемы (1), в которых необходимо эту численность сохранить, т.е.

$$N_i^{\min} < N_i < N_i^{\max}, \; i=1,2,3 \tag{3}$$

Величины $N_j^{\min}, N_j^{\max}$ назовем критическими значениями для j-ых видов ($j=1,2,3$), если для всех этих величин, удовлетворяющих (4) и

$$N_j^{\min} < N_j < N_j^{\max}, \tag{4}$$

при $i \neq j$ имеет место неравенство (4).

Определение. Задача нахождения величины $N_j^{\min}$, $N_j^{\max}$ из (1), (4), которые обеспечивают выполнение неравенства (3), называется задачей охраны i-го вида экосистемы в стационарном режиме.

Рассмотрена стационарная задача охраны для растительности, травоядных животных и хищников. Для нахождения критических значений, т.е. решения задачи охраны, рассмотрен случай, когда состояние популяций, входящих в экологическую систему, описывается законом Вольтерра

$$F_0=-\alpha_0 N_0 N_1, \; F_1=k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1,$$
$$F_2= k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2, \; F_3=k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3, \tag{5}$$

Рассмотрены следующие случаи:

1. Требуется сохранить численность редкого хищника в пределах $N_3^{\min}$, $N_3^{\max}$, т.е.

$$N_3^{\min} \le N_3 \le N_3^{\max} \tag{6}$$

Критические значения $N_j^{\min}, N_j^{\max}, j=1,2$ определены так, чтобы с учетом (8) и

$$N_j^{\min} \le N_j \le N_j^{\max}, \quad j=1,2$$

имело место неравенство (9). Используя (8) и учитывая условие $N=(N_1, N_2, N_3)>0$, система (4) принимает вид:

$$\begin{cases} Q - \alpha_0 N_0 N_1 = 0, \\ k_0\alpha_0 N_0 - \alpha_1 N_2 - m_1 = 0, \\ k_1\alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_3 - m_2 = 0, \\ k_2\alpha_2 N_2 - \varepsilon N_3 - m_3 = 0. \end{cases}$$

Критические значения биомассы растительности и травоядных животных определяются по формулам:

$$N_1^{\min} = \frac{\alpha_2 N_3^{\min}}{k_1\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_1 k_1}, \qquad N_1^{\max} = \frac{\alpha_2 N_3^{\max}}{k_1\alpha_1} + \frac{m_2}{\alpha_1 k_1},$$
$$N_2^{\min} = \max\left\{\overline{N}_2^{\min}, \quad \overline{\overline{N}}_2^{\min}\right\}, \qquad N_2^{\max} = \min\left\{\overline{N}_2^{\max}, \quad \overline{\overline{N}}_2^{\max}\right\}.$$

2. Пусть в экосистеме ценным видом объявляется «растительность», т.е. заданы $N_1^{\min}$, $N_1^{\max}$, которые обеспечивают выполнение (6). Требуется определить $N_j^{\min}$, $N_j^{\max}$, *j=2,3* для которых справедливы неравенства:

$$N_j^{\min} \le N_j \le N_j^{\max}, j=2,3$$

Аналогичным образом

$$N_3 \le \frac{k_1\alpha_1}{\alpha_2} N_1^{\max} - \frac{m_2}{\alpha_2} = \overline{N}_3^{\max}$$

$$N_3^{\min} = \max\left\{\overline{N}_3^{\min}, \quad \overline{\overline{N}}_3^{\min}\right\}, \quad N_3^{\max} = \min\left\{\overline{N}_3^{\max}, \quad \overline{\overline{N}}_3^{\max}\right\}.$$

3. Пусть теперь $N_2^{\min}$, $N_2^{\max}$ - заданные (в каком-то смысле) наилучшие критические значения численности травоядных животных, в пределах которых необходимо сохранить их количество, т.е.

$$N_2^{\min} \le N_2 \le N_2^{\max}$$

На основе предложенной методики получено

$$N_1^{\min} = \frac{k_0\alpha_0 Q}{\alpha_1 N_2^{\max} + m_1} \le N_1 \le \frac{k_0\alpha_0 Q}{\alpha_1 N_2^{\min} + m_1} = N_1^{\max}$$

$$N_3^{\min} = \max\left\{\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{k_0\alpha_0 k_1\alpha_1 Q}{\alpha_1 N_2^{\max} + m_1} + m_2\right), \quad \frac{1}{\varepsilon}\left(k_2\alpha_2 N_2^{\min} + m_3\right)\right\},$$

$$N_3^{\max} = \min\left\{\frac{1}{\alpha_2}\left(\frac{k_0\alpha_0 k_1\alpha_1 Q}{\alpha_1 N_2^{\min} + m_1} + m_2\right), \quad \frac{1}{\varepsilon}\left(k_2\alpha_2 N_2^{\max} + m_3\right)\right\}$$

Итак, справедливо следующая

Теоремы 1. Пусть теперь $N_2^{\min}, N_2^{\max}$ - соответствующие в каком-то смысле наилучшему значению численности травоядных животных, в пределах которых мы хотим сохранить количество травоядных животных, т.е. $N_2^{\min} \le N_2 \le N^{\max}{}_2$. Задача состоит в нахождении $N_1^{\min}, N_1^{\max}$, $N_3^{\min}, N_3^{\max}$.

Легко видеть, что решение задачи охраны в данном случае имеет вид

$$N_1^{\min} = \frac{k_0\alpha_0 Q}{\alpha_2 N_2^{\max} + m_1}, \qquad N_1^{\max} = \frac{k_0\alpha_0 Q}{\alpha_2 N_2^{\min} + m_1},$$

$$N_3^{\min} = \max\left\{\frac{1}{\alpha_2}\left(m_2 + \frac{k_0 k_1\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1 N_2^{\max} + m_1} Q\right), \frac{1}{\varepsilon}\left(k_2\alpha_2 N_2^{\min} + m_3\right)\right\},$$

$$N_3^{\max} = \min\left\{\frac{1}{\alpha_2}\left(m_2 + \frac{k_0 k_1\alpha_0\alpha_1}{\alpha_1 N_2^{\min} + m_1} Q\right), \frac{1}{\varepsilon}\left(k_2\alpha_2 N_2^{\max} + m_3\right)\right\}.$$

Задача охраны модельных популяций в нестационарном случае. Рассмотрим задачу охраны модельных популяций в виде:

$$\begin{cases} \dot{N}_0 = Q + F_0(N_0, N_1), \\ \dot{N}_1 = N_1 \cdot F_1(N_0, N_1, N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2 \cdot F_2(N_1, N_2, N_3), \\ \dot{N}_3 = N_3 \cdot F_3(N_2, N_3), \end{cases}$$

между видами которых происходят взаимодействия по закону Вольтерра. Введено определение понятия средней биомассы растительности и средних численностей за время τ:

$$N_i^{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} N_i(t)dt, \quad i = 1,2,3, \quad \tau > 0,$$

и сформулирована задача охраны популяций в нестационарном (непрерывном) случае. Пусть $N_{i_0}^{\min}$, $N_{i_0}^{\max}$ - желаемые диапазоны изменения i_0-го вида экосистемы, такие что

$$N_{i_0}^{\min} \le N_{i_0}^{\tau} \le N_{i_0}^{\max}, \quad i_0 \in \{1,2,3\}. \tag{10}$$

Задача охраны i-ой популяции состоит в нахождении $N_j^{\min}$, $N_j^{\max}$, которые обеспечивают выполнении условия (10) и для которых при $j \neq i_0$, справедливо

$$N_j^{\min} \le N_j \le N_j^{\max},\ j=1,2,3$$

Теоремы 2. Пусть имеют место неравенство

$$c_1 = m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\min} < o, \tag{6}$$

т.е. $N_2^{\min} > \dfrac{m_3}{k_2\alpha_2}$, и при этом

$$d_1 = \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon N_3(o)} - 1 \neq 0,$$

$$d_2 = \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon N_3(o)} - 1 \neq o.$$

Тогда

$$\frac{-m_3 + k_2 N_2^{\min}}{\varepsilon} \le \lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon} \tag{7}$$

Доказательство. Легко видеть, что из системы (1), в случае вольтеровского описания (2) мы получи слудеющие соотношения:

$$\begin{cases} N_o(t) = N_o(o)e^{-\alpha_o}\int_o^t N_1(\xi)d\xi + Q\int_o^t e^{-\alpha_o\int_\xi^t N_1(n)dn}d\xi & (8^1) \\ \dfrac{k_o\alpha_o}{t}\int_o^t N_o(\xi)d\xi - \dfrac{\alpha_1}{t}\int_o^t N_2(\xi)d\xi = m_1 + \dfrac{1}{t}\ln\dfrac{N_1(t)}{N_1(o)} & (8^2) \\ \dfrac{k_1\alpha_1}{t}\int_o^t N_1(\xi)d\xi - \dfrac{\alpha_2}{t}\int_o^t N_3(\xi)d\xi = m_2 + \dfrac{1}{t}\ln\dfrac{N_2(t)}{N_2(o)} & (8^3) \\ N_3(t) = \dfrac{N_3(o)}{e^{-\int_o^t[-m_3+k_2\alpha_2 N_2(\xi)]d\xi} + \varepsilon N_3(o)\int_o^t e^{-\int_\xi^t[-m_3+k_2\alpha_2 N_2(n)]dn}d\xi} & (8^4) \end{cases}$$

Пусть

$$N_2^{\min} \le \frac{1}{\tau}\int_o^\tau N_2(\xi)d\tau \le N_2^{\max} \tag{9}$$

при $o \le \tau < +\infty$. Здесь $N_2^{\min}$, $N_2^{\max}$ будем сейчас счиать задаными и пусть при этом выполнется неравенство (6^1). Тогда очевидно, выполнено и

$$c_2 = m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\max} < o. \tag{6^2}$$

Покажем, что из условий (8^4) и (6^1) вытекают оценки (7). Действительно, в силу положительности коэффициентов и соотношений (8^4), (9) имеет место, следующее неравенство

$$N_3(t) \le \frac{N_3(o)}{e^{-\int_o^t[-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}]d\xi} + \varepsilon N_3(o)\int_o^t e^{-\int_\xi^t[-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}]dn}d\xi} =$$

$$\frac{N_3(o)}{e^{-[-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}]t} + \varepsilon N_3(o)\int_o^t e^{(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max})(\xi-t)}d\xi} =$$

$$= \frac{N_3(o)}{e^{-(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max})t}\left[1+\varepsilon N_3(o)\int\limits_o^t e^{(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max})\xi}d\xi\right]} =$$

$$\frac{N_3(o)}{e^{-(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max})t}\left[1+\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}}\left(e^{(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max})t}-1\right)\right]} =$$

$$= \frac{N_3(o)}{e^{(m_3-k_2\alpha_2 N_2^{\max})t}+\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}}\left[1-e^{(m_3-k_2\alpha_2 N_2^{\max})t}\right]} \qquad (10)$$

при $o \le t < +\infty$. С помощью аналогичных выкладок из (8^4), (9) и (6^1) получаем оценку снизу

$$N_3(t) \ge \frac{N_3(o)}{e^{-\int\limits_o^t(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\min})d\xi}+\varepsilon N_3(o)\int\limits_o^t e^{-\int\limits_\xi^t(-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\min})dn}d\xi} = \frac{N_3(o)}{e^{(m_3-k_2\alpha_2 N_2^{\min})t}+\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\min}}\left[1-e^{(m_3-k_2\alpha_2 N_2^{\min})t}\right]} > o \qquad (11)$$

при $o \le t < +\infty$.

Из (10) и (11) вытекает следующие оценки

$$o < \frac{N_3(o)}{\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\min}}+\left[1-\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\min}}\right]e^{(m_3-k_2\alpha_2 N_2^{\min})t}} \le N_3(t) \le$$

$$\le \frac{N_3(o)}{\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}}+\left[1-\frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}}\right]e^{(m_3-k_2\alpha_2 N_2^{\max})t}} \qquad (12)$$

при любом $t \in [o, \infty)$.

Используя неравенства (12) и условия (6^1), (6^2) можно получить оценки снизу и сверху для средней численности $N_3^t = \frac{1}{t}\int\limits_o^t N_3(\tau)d\tau$. Для этого рассмотрим в общем случае следующий интеграл при $c < o$, $a < o$; $a + b > 0$, $o \le t < +\infty$.

$$\frac{1}{t}\int\limits_o^t \frac{k\,dt}{a+b\,e^{ct}} = \frac{k}{a}\frac{1}{t}\int\limits_o^t \frac{e^{-ct}dt}{e^{-ct}+\frac{b}{a}} = \frac{k}{ac}\frac{1}{t}\int\limits_o^t \frac{d\left[e^{-ct}+\frac{b}{a}\right]}{e^{-ct}+\frac{b}{a}} = \frac{k}{ac}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-ct}+\frac{b}{a}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\right] \qquad (13)$$

При этом так как $c < o$, то

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int\limits_o^t \frac{k\,dt}{a+be^{ct}} = -\frac{k}{ac}\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(e^{-ct}+\frac{b}{a}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{t} =$$

$$-\frac{k}{ac}\lim_{t\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(e^{-ct}+\frac{b}{a}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]'}{t_k'} = \frac{k}{a}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-ct}}{e^{-ct}+\frac{b}{a}} = \frac{k}{a}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{b}{a}e^{c}} = \frac{k}{a}, \qquad (13')$$

Введём обозначения

$$a_1 = \frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\min}}\ ;\quad a_2 = \frac{\varepsilon N_3(o)}{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}}$$

$$b_i = 1 - a_i\ ,\quad i = 1,2 \qquad (14)$$

$c_1 = m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\min} < 0$ по условию (6).

Следовательно,

$$c_2 = m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\max} < o \qquad (6^2)$$

Из соотношений (6^1-6^2), (12-14) вытекают неравенства

$$o < \frac{k}{a_1c_1}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_1t} + \frac{b_1}{a_1}\right) - \ln\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)\right] \le \frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le -\frac{k}{a_2c_2}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{c_2t} + \frac{b_2}{a_2}\right) - \ln\left(1 + \frac{b_2}{a_2}\right)\right], \quad (15)$$

где обозначения взяты из формул (6^1), (6^2) и (14).

Переходя к предмету при $t \to +\infty$ в неравенстве (15), и используя при этом формулу предельного перехода в общем случае (13^1) и обозначения (14), получим неравенство

$$o < \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon} \le \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon} \qquad (16)$$

Теорема доказана

Следствие. Если самолимитирование отсутствует, т.е. $\varepsilon = o$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_o^t N_3(t)dt = \infty.$$

Введя $\overline{N} = \lim\frac{1}{t}\int_o^t N_3(t)dt$, то $\frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\overline{N}} \le \varepsilon \le \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\overline{N}}$ и при $N_2^{\max} = \frac{m_3}{k_2\alpha_2}$ имеем $-\varepsilon_o \le \varepsilon \le o$, т.е.

Теорема 2. Пусть имеет место условие (6^1)

$c_1 = m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\min} < o$. Тогда, если

$$a)\ d_2 = \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon N_3(o)} - 1 < o, \qquad (17^1)$$

то

$$N_3(o) \le \int_o^t N_3(\tau)d\tau \le \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon};$$

если же

$$б)\ d_1 = \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon N_3(o)} - 1 > 0, \qquad (17^2)$$

то

$$\frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon} \le \frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le N_3(o)$$

Доказательство. Предварительно вычислим предельное соотношение для интеграла из формулы (13)

$$\lim_{t\to o}\left\{-\frac{k}{act}\left[\ln\left(e^{-ct} + \frac{b}{a}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]\right\} = \frac{k}{ac}\lim_{t\to o}\frac{\left[\ln\left(e^{-ct} + \frac{b}{a}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]'}{t_t'} =$$

$$\lim_{t\to o}\left[-\frac{k}{ac}\cdot\frac{-c\,e^{-ct}}{e^{-ct} + \frac{b}{a}}\right] = \frac{k}{a}\frac{1}{a+b} = \frac{k}{a+b} \qquad (18)$$

Из обозначений (6^1), (6^2), (14) и из (18) вытекает, что

$$\lim_{t\to o}\left\{-\frac{k}{a_i c_i}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_i t}+\frac{b_i}{a_i}\right)-\ln\left(1+\frac{b_i}{a_i}\right)\right]\right\}=\frac{k}{a_i+b_i}=k=N_3(o) \text{ при } i=1,2 \qquad (19)$$

Кроме того

$$\lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{k}{a_i c_i}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{c_i t}+\frac{b_i}{a_i}\right)-\ln\left(1+\frac{b_i}{a_i}\right)\right]\right\}=\frac{k}{a_i} \text{ при } i=1,2 \qquad (19')$$

Исследуем теперь функцию где $c<o, a>o, b=1, b\neq o$

$$f(t)=\frac{-k\left[\ln\left(e^{-ct}+\frac{b}{a}\right)-\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]}{ac\quad t}=\frac{k}{a\quad m}\frac{\ln\left(e^{mt}+d\right)-\ln(1+d)}{t} \qquad (20)$$

при обозначениях $m=-c>o,\ d=\frac{b}{a}=\frac{1}{a}=1\neq 0,$ на max и min. Найдем

$$f'(t)=-\frac{k}{a\,m}\frac{\frac{1}{e^{mt}+d}m\,e^{mt}t-\left[\ln\left(e^{mt}+d\right)-\ln(1+d)\right]}{t^2}=$$
$$=\frac{k}{a\,m}\frac{\left[\ln\left(e^{mt}+d\right)-\ln(1+d)\right]\left(e^{mt}+d\right)-mte^{mt}}{t^2\left(e^{mt}+d\right)}. \qquad (21)$$

Так, как $e^{mt}+d\neq o$ при $t\geq o$, то уравнение $f'(t)=o$ эквивалентно уравнению

$$\left[\ln\left(e^{mt}+d\right)-\ln(1+d)\right]\left(e^{mt}+d\right)-mte^{mt}=o \qquad (22)$$

Применив теорему Лагранжа о среднем можно записать

$$\ln\left(e^{mt}+d\right)-\ln(1+d)=\frac{me^{mt_{cp}}}{e^{mt_{cp}}+d}t, \qquad (23)$$

где $o<t_{cp}<t,$ причем последние неравенства строгие.

Из (23) вытекает, что (22) можно представить в виде

$$\frac{m\,e^{mt_{cp}}t\left(e^{mt}+d\right)}{\left(e^{mt_{cp}}+d\right)}-mte^{mt}=\frac{m\ e^{mt_{cp}}}{e^{mt_{cp}}+d}\cdot\frac{e^{mt}+d}{e^{mt}}\cdot e^{mt}t-mte^{mt}=mte^{mt}\left[\frac{\psi(t)}{\psi(t_{cp})}-1\right], \qquad (24)$$

где

$$\psi(t)=\frac{e^{mt}+d}{e^{mt}}=1+de^{-mt},\quad o<t_{cp}<t \qquad (25)$$

Вычислем

$$\psi'(t)=-dme^{-mt}=\begin{cases}>o & при\quad d<o\\ <o & при\quad d>o\end{cases} \qquad (26)$$

Из (21)-(26) следует, что

$$f'(t)=\begin{cases}>o & при\quad d<o,\\ <o & при\quad d>o\end{cases} \qquad (27)$$

Из (20), (27) вытекает, что функция $f(t)$ на полуоси $(o,+\infty)$ монотонно возрастает при $d<o$ и монотонно убывает при $d>o.$ Отсюда следует, что функция $f(t)$ при $d\neq o$ не имеет точек локальных max и min на $(o,+\infty).$ Следовательно, она досчитает своих абсолютных значений max и min на $[o,+\infty)$ только при $t=o$ или $t=+\infty.$ Из этого заключения, сравнивая формулы (15) и (20), а также из формул (13^1), (16), (19) делаем вывод, что при $d_1\leq d_2=\frac{-m_3+k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon\,N_3(o)}-1<o$ левая и правая часть в неравенства (16) возрастают и, следовательно,

$$N_3(o)=\lim_{t\to o}\left\{-\frac{k}{a_1c_1}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_1t}+\frac{b_1}{a_1}\right)-\ln\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)\right]\right\}\le\frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau\le$$

$$\le\lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{k}{a_2c_2}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_2t}+\frac{b_2}{a_2}\right)-lin\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)\right]\right\}=\frac{-m_3+k_2\alpha_2N_2^{\max}}{\varepsilon}$$

при всех $o\le t<\infty,$ если выполнено увсловие (17). Аналогично, если

$$d_2\ge d_1=\frac{-m_3+k_2\alpha_2N_2^{\min}}{\varepsilon\ N_3(o)}-1>o,$$

то левая и правая части неравенства (15) убывают. Поэтому из (13) и (19) вытекает, что

$$\frac{-m_3+k_2\alpha_2N^{\min}}{\varepsilon}=\lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{-k}{a_1c_1}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_1t}+\frac{b_1}{a_1}\right)-\ln\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)\right]\right\}\le\frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau\le$$

$$\le\lim_{t\to o}\left\{-\frac{k}{a_2c_2}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_2t}+\frac{b_2}{a_2}\right)-\ln\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)\right]\right\}=N_3(o)$$

Теорема доказана

Теорема 3. Пусть имеет место условие (6^1) $c_1=m_3-k_2\alpha_2N_2^{\min}<o$ и выполняется одно из следующих условий.

а) имеет место хотя бы одно из равенств

$$d_1=\frac{1}{a_1}-1=\frac{-m_3+k_2\alpha_2N_2^{\min}}{\varepsilon\ N_3(o)}-1=o \tag{28}$$

или

$$d_2=\frac{1}{a_2}-1=\frac{-m_3+k_2\alpha_2N_2^{\max}}{\varepsilon\ N_3(o)}-1=o \tag{29}$$

либо

б) одновременно реализуются неравенства

$$d_1<o \text{ и } d_2>o.$$

Тогда $N_3^t\equiv N_3(t)\equiv N_3(o)=const$ при всех $o\le t<+\infty$.

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется условие *а*). Заметим, что при выполнении хотя бы одного из равенств (28) или (29) левая или соответственно правая часть неравенства (12) приобретает вид

$$\varphi_i(t)\equiv\frac{k}{a_i}\quad\text{при } o\le t<+\infty,$$

где $i=1$ в случае левой части а $i=2$ в случае правой части неравенства (12)

$$\frac{1}{t}\int_o^t\varphi_i(\tau)d\tau=\frac{k}{d_i}\frac{1}{t}\int_o^t d\tau\equiv\frac{k}{a_i}.$$

Поэтому неравенства (15), (16) в этом случае заменятся соответственно на следующие:

1) если $d_1=o$ и $d_2>o,$ то вместо (15) будет

$$o<\frac{m_3-k_2\alpha_2N_2^{\min}}{\varepsilon}=N_3(o)\le\frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau\le-\frac{k}{a_2c_2}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_2t}+\frac{b_2}{a_2}\right)-\ln\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)\right] \tag{30}$$

при всех $o\le t<+\infty.$ Так как $d_2>o,$ то, как следует из доказательства теоремы 2, правая часть неравенства (30) убывает на полуоси $[o,+\infty)$ и, следовательно,

$$o<N_3(o)\le\frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau\le\lim_{t\to o}\left\{-\frac{k}{a_2c_2}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{c_2t}+\frac{b_2}{a_2}\right)+\ln\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)\right]\right\}=N_3(o) \tag{31}$$

при всех $o \le t < +\infty$ вместо неравенства (16)

2) если $d_2 = o$ и $d_1 < o$, то вместо (15) будет

$$o < -\frac{k}{a_1 c_1}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{-c_1 t} + \frac{b_1}{a_1}\right) - \ln\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)\right] \le \frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le \frac{m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon} = N_3(o) \qquad (32)$$

при всех $o \le t < +\infty$. Так как при этом $d_1 < o$, то левая часть неравенства (32) возрастает и, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, получим из (32)

$$o < \lim_{t\to o}\left\{-\frac{k}{a_1 c_1}\frac{1}{t}\left[\ln\left(e^{c_1 t} + \frac{b_1}{a_1}\right) - \ln\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)\right]\right. = N_3(o) \le \frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le N_3(o) \qquad (33)$$

при всех $o \le t < +\infty$.

Из (31) и (33) вытекает, что при условии выполнения хотя бы одного из равенств (28) или (29) имеет место тождество

$$N_3^t = \frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau = N_3(o) = const \qquad (34)$$

при всех $o \le t < +\infty$.

2. Пусть теперь имеет место случай б), т.е. одновременно выполнются равенство (6^1) и неравенства $d_1 < o$, $d_2 > o$. В этом случае $b_i \ne o$, $i = 1,2$ и неравенство (12) используется в дальнейшем так же, как при доказательстве теорем 1 и 2. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2, можно сделать вывод, что, так как в этом случае $d_1 < o$, то в неравенстве (15) левая часть возрастает, и, так как $d_2 > o$, то правая часть неравенства (15) убывает на полуоси $[o,+\infty)$. Неравенства

$$o < \lim_{t\to +o}\left\{-\frac{k}{a_1 c_1}\left[\ln\left(e^{-c_1 t} + \frac{b_1}{a_1}\right) - \ln\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)\right]\right\} = N_3(o) \le$$

$$\le \frac{1}{t}\int_o^t N_3(\tau)d\tau \le \lim_{t\to +o}\left\{-\frac{k}{a_2 c_2}\left[\ln\left(e^{-c_2 t} + \frac{b_2}{a_2}\right) - \ln\left(1 + \frac{b_2}{a_2}\right)\right]\right\} = N_3(o)$$

при всех $o \le t < +\infty$. Последнее неравенство эквивалентно тождеству (34), которое было получено при рассмотрении случая *а*). Перепишем (34) в виде

$$\int_o^t N_3(\tau) = N_3(o)t \qquad (35)$$

при $o \le t < +\infty$. Продифференцировав (35) получим

$$N_3(t) \equiv N_3(o) \text{ при } o \le t < +\infty,$$

что в сочетании с (34) дают утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие. Пусть заданы диапазоны средней численности 3-го вида популяции, входящие в экосистему (1)

$$N_3^{\min} \le N_3^t \le N_3^{\max}, \qquad (37)$$

где $N_3^{\min}$, $N_3^{\max}$ - заданные числа.

Теорема 4. Для того, чтобы поддерживать N_3^t в интервале (37) при всех $o \le t < +\infty$ достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$1) \qquad N_2^{\min} > \frac{\varepsilon N_3(o) + m_3}{k_2\alpha_2} \qquad (38)$$

или же

$$2) \qquad N_2^{\max} < \frac{\varepsilon N_3(o) + m_3}{k_2\alpha_2} \qquad (39)$$

и

$$N_2^{\min} > \frac{m_3}{k_2\alpha_2} \tag{40}$$

Доказательство. I. Рассмотрим случай 1). Пусть выполняется условие (38). Тогда очевидно

$d_1 = \dfrac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon N_3(o)} - 1 > o$ и $m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\min} < o$, т.е. выполняются условия (6^1) и (17^2) теоремы 2 достаточные условия б), обеспечивающие для N_3^t неравенства

$$\frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon} \le N_3^t \le N_3(o) \tag{41}$$

при всех $o \le t < +\infty$.

Сравнивая (37) и (41) получаем, что для того, чтобы выполнялось (37) при всех $o \le t < +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$N_3^{\min} \le \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\min}}{\varepsilon},$$

которое эквивалентно неравенству

$$N_2^{\min} \ge \frac{m_3 + \varepsilon N_3^{\min}}{k_2\alpha_2} \tag{42}$$

Но выполнение неравенства (42) вытекает очевидным образом из (38). Таким образом, в случае 1) теорема доказана.

II. Пусть теперь имеет место случай 2), т.е. выполняются условия (39), (40). Они эквивалентны соответственно неравенствам

$$d_2 = \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon\ N_3(o)} - 1 < o \text{ и } m_3 - k_2\alpha_2 N_2^{\min} < o$$

т.е. условиям (6^1) и (17^1) теоремы 2 достаточного условия *а*), обеспечивающего неравенства

$$N_3(o) \le N_3^t \le \frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon} \text{ при всех } o \le t < +\infty. \tag{43}$$

Сопоставляя (37) и (43) делаем очевидной вывод, что для выполнения неравенства (37) при всех $o \le t < +\infty$. В случае 2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{-m_3 + k_2\alpha_2 N_2^{\max}}{\varepsilon} \le N_3^{\max},$$

т.е.

$$N_2^{\max} \le \frac{\varepsilon N_3^{\max} + m_3}{k_2\alpha_2} \tag{44}$$

Но выполнение (44) вытекает из (39).

Итак, утверждение теоремы показано и в случае 2).

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 4 дает достаточные условия для решения задачи об охране «ценного вида в экосистеме растительность, на травоядные животные и хишники питающиеся травоядными животными», описываемой системой дифференциальных уравнений (1), для случая, когда охраняемым «ценным» видом является популяция «хищников», т.е. $i = 3$ в неравенствах (4), из формулировки задачи об охране.

Задача охраны модельных популяций с учетом пространственных распределений. Пусть $N^{\min}$, $N^{\max}$ - некоторые положительные числа, означающие

желаемые диапазоны изменения численности некоторой популяции животных, и функция $N = N(x,a,t)$ - численность этой популяции в точке $x \in \overline{G}$ возраста a, $0 \le a < \infty$, в момент времени t, $0 \le t \le t_k$. Предполагается, что численность рассматриваемой модельной популяции удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial a} + \sum_{i=1}^{2} V_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = F_0(a)N + \sum_{i=1}^{2} D_i \frac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \tag{45}$$

$$x \in \overline{G}, \ 0 < a < \infty, \ 0 < t \le t_k.$$

начальному и граничному условиям:

$$\begin{cases} N(x,a,0) = N_0(x,a), \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \le a < \infty \\ N(x,0,t) = \int\limits_0^\infty \mathrm{B}_0(\xi) N(x,\xi,t) d\xi, \\ \left.\dfrac{\partial N}{\partial x_i} - \alpha_i N\right|_{x_i=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial N}{\partial x_i} - \alpha_i N\right|_{x_i=L_i} = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Здесь V_i и D_i – заданные положительные числа, $\alpha_i = V_i/(2D_i)$, $i=1,2$; N_0, B, F - заданные неотрицательные и непрерывные функции, которые характеризуют начальную численность, коэффициенты смертности и рождаемости,

$$N = \widetilde{N}(x,a,t) - N^*(a), \ \frac{dN^*}{da} = F(N^*), \quad N^*(0) = \int\limits_0^\infty B(N^*)N^* da.$$

Задача охраны популяций животных состоит в нахождении условий, которые обеспечивают выполнение неравенства

$$N^{\min} \le \widetilde{N}(x,t) \le N^{\max}, \quad x \in \overline{G}, \quad 0 \le t \le t_k \tag{47}$$

Или $N^{\min} \le \int\limits_G \widetilde{N}(x,t)dx \le N^{\max}$, $t > 0$, где $\widetilde{N}(x,t) = \int\limits_0^\infty P(a)N(x,a,t)da$, причем $P(a) \ge 0$, $0 \le a < \infty$, $\int\limits_0^\infty P(a)da = 1$. Если найдутся положительные числа $N^{\min}$, $N^{\max}$ и функция *P(a)* такие, что осредненная численность модельной популяции удовлетворяет условию (47), то популяция животных будет существовать стабильно.

Теорема 3. Пусть существуют

$$\frac{\partial \widetilde{N}_0}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \widetilde{N}_0}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ где } \widetilde{N}_0(x) = \int\limits_0^\infty P(\xi)N_0(x,\xi)d\xi.$$

тогда для того чтобы модельная популяция (45)-(47) существовала стабильно, необходимо и достаточно, чтобы максимальный вещественный корень уравнения

$$\int\limits_0^\infty B_0(\xi) e^{\int\limits_0^\xi F_0(\eta)d\eta - \delta\xi} d\xi = 1 \text{ равнялся числу } \delta_0 = \sum_{i=1}^{2} \frac{V_i^2}{4D_i}.$$

посвящен решению задачи охраны редких животных экологических систем с учетом возрастного состава и пространственных распределений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t}+\dfrac{\partial N}{\partial a}+\sum\limits_{i=1}^{2} v_i \dfrac{\partial N}{\partial x_i}=F_0(a)N+\sum\limits_{i=1}^{2} D_i \dfrac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \quad x\in G, 0<a<\infty, \quad 0<t\le t_k \\ N(x,a,0)=N_0(x,a), \quad x\in G, \quad 0\le a<\infty \\ N(x,0,t)=\int\limits_0^{\infty} B_0(\xi)N(x,\xi,t)d\xi, \quad x\in \overline{G}, \quad 0\le t<t_k \\ N\big|_s=0, \end{cases} \tag{48}$$

где $N=(N_1, N_2, ..., N_m)$, $\overline{G}=G+S$, $G=\{(x_1,x_2): \ 0<x_i<L_i, i=1,2\}$,
S – граница области G.

$$F_0(a)=\begin{pmatrix} F_{11}(a) & ... & F_{1m}(a) \\ ... & ... & ... \\ F_{m1}(a) & ... & F_{mm}(a) \end{pmatrix}, \quad B_0(a)=\begin{pmatrix} b_{11}(a) & ... & b_{1m}(a) \\ ... & ... & ... \\ b_{m1}(a) & ... & b_{mm}(a) \end{pmatrix},$$

$$v_i=\begin{pmatrix} v_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{im} \end{pmatrix}, \quad D_i=\begin{pmatrix} d_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{im} \end{pmatrix}, \quad i=1,2$$

Пусть $N^{\min}$, $N^{\max}$ - положительные вектора (часть компонентов этих векторов для некоторых видов задается, а часть находятся в результате решения задачи). Требуется найти условия относительно модельной экосистемы (48), обеспечивающие неравенство: $N^{\min}\le N(x,a,t)\le N^{\max}$. Решение задачи (48) представляется в виде (при любом $m\ge 1$):

$$Z(a)=\sum_{i=0}^{\infty} Z_i(a), \quad Z_{i+1}(a)=\int\limits_0^a F_0(\xi)Z_i(\xi)d\xi, \ Z_0(a)=1,$$

$$N(x,a,t)=\frac{2}{\sqrt{L_1L_2}}Z(a)\sum_{n_1n_2=1}^{\infty} E^{\lambda}_{n_1n_2}(a)M_{n_1n_2}(t-a)\cdot\sin\frac{\pi n_1x_1}{L_1}\sin\frac{\pi n_2x_2}{L_2}E_{DV}(x),$$

где

$$E^{\lambda}_{n_1n_2}(a)=\begin{pmatrix} e^{-\lambda^1_{n_1n_2}a} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\lambda^m_{n_1n_2}a} \end{pmatrix}, \ E_{DV}(x)=\begin{pmatrix} e^{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{v_{i1}x_i}{2D_{i1}}} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{v_{im}x_i}{2D_{im}}} \end{pmatrix},$$

$M_{n_1n_2}(t)$ - является решением следующего интегрального уравнения

$$M_{n_1n_2}(t)=\int\limits_0^t \widetilde{B}(\xi,t)M_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi+f(t), \ M_{n_1n_2}(t)=\int\limits_0^{\infty} B(\xi)M_{n_1n_2}(t-\xi)d\xi,$$

где $B(\xi)=B_0(\xi)Z(\xi)E^{\lambda}_{n_1n_2}(\xi)$ является матрицей выживаемости возрастно-пространственно-распределенных сообществ. Теперь рассмотрим задачу охраны редьких животных с учетом возрастного состава и пространственных распределений в нелинейном случае:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t}+\dfrac{\partial N}{\partial a}+\sum\limits_{i=1}^{2} v_i \dfrac{\partial N}{\partial x_i}=F(N)+\sum\limits_{i=1}^{2} D_i \dfrac{\partial^2 N}{\partial x_i^2}, \quad x\in G, \quad 0<a<\infty, \quad 0<t\le t_k, \\ N(x,a,0)=N_0(x,a), \quad x\in G, \quad 0\le a<\infty, \\ N(x,0,t)=\int\limits_0^\infty BN(x,\xi,t)d\xi \quad x\in \overline{G}, \quad 0\le t<t_k \\ N\big|_S=0, \quad \left(\dfrac{\partial N}{\partial n}-\alpha N\big|_S=0\right), \end{cases} \tag{50}$$

где $N=(N_1,...,N_m), \quad N_i=N_i(x,a,t), \quad i=\overline{1,m},$

$$F=\begin{pmatrix} F_{11}(N) & ... & F_{1m}(N) \\ ... & ... & ... \\ F_{m1}(N) & ... & F_{mm}(N) \end{pmatrix}, \quad B_0(a)=\begin{pmatrix} B_{11}(N) & ... & B_{1m}(N) \\ ... & ... & ... \\ B_{m1}(N) & ... & B_{mm}(N) \end{pmatrix},$$

$$v_i=\begin{pmatrix} v_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{im} \end{pmatrix}, \quad D_i=\begin{pmatrix} d_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{i2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{im} \end{pmatrix}.$$

Введя $\Delta N=N(x,a,t)-N^*(a)$, где $N^*(a): \dfrac{dN^*}{da}=F(N^*), \quad N^*(0)=\int\limits_0^\infty B(N^*)da$, для линеаризованной задачи получено

$$\left\{ \frac{\partial \Delta N}{\partial t}+\frac{\partial \Delta N}{\partial a}+\sum_{j=1}^{2} v_j \frac{\partial \Delta N}{\partial x_j}=\Delta F+\sum_{j=1}^{2} D_j \frac{\partial^2 \Delta N}{\partial x_j^2} \right.$$

Сформулируем задачу охраны. Пусть $N^{\min}, N^{\max}$ - положительные вектора (часть компонентов этих векторов для некоторых видов задается, а часть находится в результате решения задачи). Требуется найти условия для модельной экосистемы (50), обеспечивающие неравенство

$$N^{\min}\le \Delta N(x,a,t)\le N^{\max}.$$

Пример. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим экологическую систему источников Сильвер-Спинг со следующими приведенными данными из [21]:

$Q=20810$, $k_0=0{,}42$, $k_1=0{,}44$, $k_2=0{,}175$,
$m_1=6{,}755/r$, $m_2=29{,}6/r$, $m_3=4{,}18/r$,
$r_0=0{,}1125/r^2$, $r_1=0{,}956/r^2$, $r_2=1{,}27/r^2$,

где биомассы уравнений выражены в граммах сухого веса, а энергетические потоки в килокалориях; r - масштабный коэффициент перехода от биомассы в г/м², в «биомассы», в ккал/м² . Пусть: $\varepsilon=0$, $N_2^{\max}=60$, $N_2^{\min}=20$, *тогда*

$$N_1^{\min}=\frac{1041}{570+7\cdot r}, \quad N_3^{\max}=\frac{437}{29+9\cdot r}.$$

Способы определения коэффициентов. *Рассмотрим способ определения неизвестных коэффициентов вычислительной модели для определения численности популяций экосистем заповедника и некоторые результаты вычислительных экспериментов предложенной в работе.*

Пусть в качестве математической модели некоторой экологической системы, состоящей из n-видов, выбрана Вольтерровская модель в следующем виде [21]:

$$\frac{dN_i}{dt}=b_i(T,W)N_i+\sum_{i=1}^{n} a_{ij}N_iN_j+Q_i(t), \tag{51}$$

где $N_i=N_i(t)$ численности i-го вида в момент времени t; b_i (T,W)-коэффициенты смертности (или рождаемости i-го вида, зависящий от температуры T и влажности W

окружающей среды; A=(a_{ij})) – матрица взаимодействия экосистемы; $Q_i(t)$-скорость поступления внешнего ресурса, $i=\overline{1,n}$. Предположим, что заданы результаты наблюдение за экосистемой:

$$\widetilde{N}_{ij} = N_i(t_j) + \xi_{ij}, \ \ i=\overline{1,n} \tag{52}$$

где $\widetilde{N}_{ij}$-наблюдения за численностью i-го вида в определенном времени t_j; $N_i(t_j)$ – действительное (точное) значения численности i-го вида в момент t_j; ξ_{ij}-ошибка наблюдений, причем $M[\xi_{ij}]=0$, $M[\overline{\xi}_j\overline{\xi}_j^T]=\lambda^{-1}(t_j)$, здесь M-символ математического ожидания, а $M[\overline{\xi}_j\overline{\xi}_j^T]$-дисперсионная матрица вектора ошибок $\overline{\xi}_j^T=\left(\xi_{1j},\xi_{2j},...,\xi_{nj}\right)$ предлагается известной. Сформулируем задачу. По известным наблюдениям (52), а также коэффициентами смертности $b_i(T,W)$ и сокращениям поступления внешнего ресурса $Q_i(t)$, требуется определить матрицу взаимодействия экосистемы A. Поиск матрицы A сводит к решению следующей задачи минимизации

$$\min_{A\in\Omega} I(A), \tag{53}$$

где $\Omega\subseteq R^{nxn}$ – некоторая область, выбираемая из чисто практических соображений с учетом ограниченности $N_i(t):\left|N_i(t)\right|\le C<\infty$, и функционал I(A) – определяется следующим образом:

$$I(A)=\sum_{k=1}^{m}P_k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\widetilde{N}_{ik}-N_i(t_k,A)\right]\lambda_{ij}^k\left[\widetilde{N}_{jk}-N_i(t_k,A)\right],$$

P_k – весовые коэффициенты; λ_{ij}^k-элементы матрицы $\Lambda(t_k)$. Приводим приближенный способ те алгоритм решения сформулированной задачи. Пусть $a_{\alpha\beta}^{(0)}$ – начальные приближения элементов матрицы взаимодействия, тогда минимизирующая последовательность $\left\{a_{\alpha\beta}^s\right\}$ строится при помощи следующего итерационного процесса:

$$a_{\alpha\beta}^{s+1}=a_{\alpha\beta}^s-\int\nabla_{\alpha\beta}(A^s),\ \ s=0,1,2.....,\ \text{где}\ \nabla_{\alpha\beta}(A^{(s)})=\left.\frac{\partial I}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{A^s},\ \ -p\ -$$

константы, которые выбираются из условия минимизации функционалов $\min\limits_{p\in[0,1]} I\left(\left\|a_{\alpha\beta}^s-p\nabla_{\alpha\beta}(A^s)\right\|\right)$. Итерационный процесс прекращается на m-ом шаге, когда достигается необходимая точность, т.е. когда на двух соседних шагах модуль компонента вектора-градиента не перевышает заданной точности. Величины $\nabla_{\alpha\beta}(A^s)$ в силу функционала I(A) определяются следующим образом:

$$\nabla_{\alpha\beta}(A^s)=-\sum_{k=1}^{m}P_k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}^k\left\{\left[\widetilde{N}_{jk}-N_j(t_k,A^s)\right]\left.\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{A^{(s)},t_k}+\right.$$

$$\left.+\left[\widetilde{N}_{ik}-N_i(t_k,A^s)\right]\left.\frac{\partial N_j}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{A^{(s)},t_k}\right\}$$

в этой формуле $\widetilde{N}_{ik}$-определяются по формуле (52), $N_i(t,A)$-решение систем дифференциальных уравнений, $a\left.\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{t_k,A}$ как решение следующей задачи Коши:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right)=\begin{cases} b_i\dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}+\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\left[\dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}N_j+\dfrac{\partial N_j}{\partial a_{\alpha\beta}}N_i\right], i\neq\alpha \\ b_i\dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\left[\dfrac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}N_j+\dfrac{\partial N_j}{\partial a_{\alpha\beta}}N_i\right] i=2. \end{cases}, \quad \left.\frac{\partial N_i}{\partial a_{\alpha\beta}}\right|_{t=0}=0$$

Предложенный алгоритм нахождения матрицы взаимодействия и численности видов, должен быть, запрограммирован в виде комплекса прикладных программ на языке DELPH. В качестве примера будем рассматривать экосистему хлопкового поля с ее основными видами. Основу данной экосистемы составляют травоядные животные, которые в заповеднике находят обильный источник питания и размножаются интенсивно. К ним относятся: винторогий козел, кабан, бухарский горный баран и др. Другим важным компонентом данной экосистемы, являются хищники, регулирующие численность травоядных животных. Это, прежде всего - снежный барс, волки и др. Для построения математической модели рассматриваемой экосистемы воспользуемся взаимодействием в заповеднике, на основе экспериментальных данных, полученных на кафедре экологии ТНУ. В результате ряда преобразований и вычислительных экспериментов, получим систему уравнений типа системы (51), которая описывает взаимоотношение вредных и полезных насекомых для случая «напряженности» графических связей, коэффициенты матрицы взаимодействий экологической системы определим на основе выше изложенного алгоритма.

Пусть $a_1=1000,\ a_i=0,\ \ b_1=-a_1,\quad b_2=-0{,}9,\ b_3=-0{,}8$, тогда

$$A=\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.09 & 0.0 & -0.6 & -0.01 \\ 0.0 & 0.5 & 0.0 & -1.2 \\ 0.0 & 0.001 & 0.5 & 0.0 \end{pmatrix}$$

является матрицей взаимодействий между компонентами заповедника.

На рисунках приведена динамика численности винторогого козла и его хищников (волк, снежный барс) по годам, полученная в результате вычислительных экспериментов. Из анализа полученных результатов следует, что они удовлетворительно аппроксимируют натурные данные, полученные в отделе охраны природы. Полевые натурные данные являются среднегодовыми в течение 10 лет с интервалом 5 лет, полученные в заповеднике «Дашти-Джум» Таджикистана (рис. 3).

a=0,2, b=0,1, y0=[30;1]

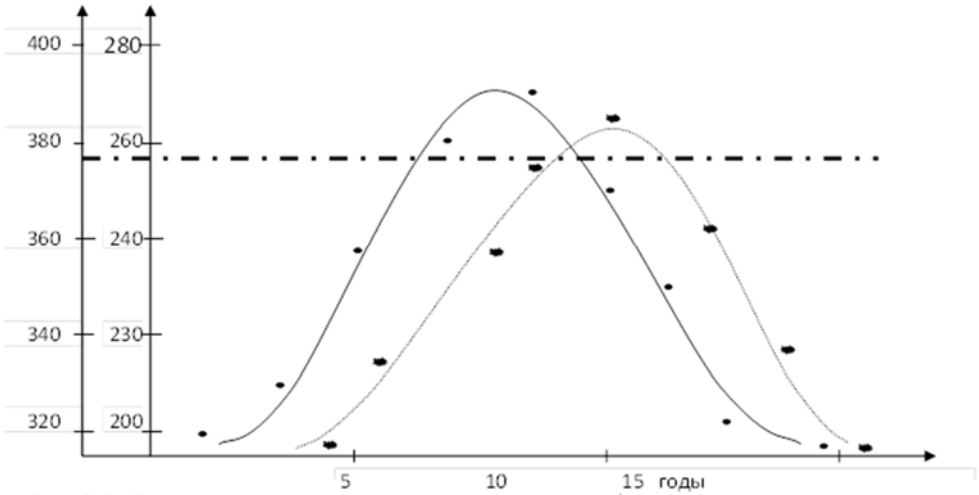


Рис. 3. *Динамика численности винторогого козла (модельные ——, натурные ● ● ● ●).*

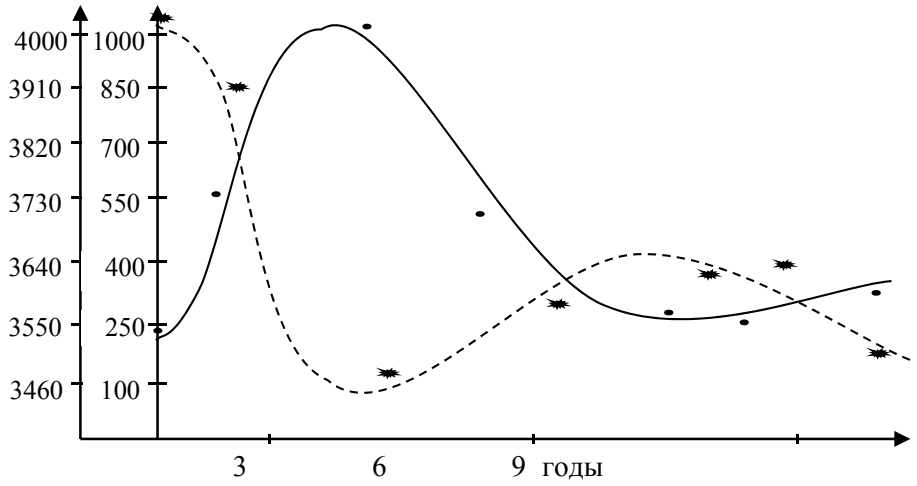


Рис. 4. *Динамика численности винторогого козла (модельные ——, натурные ● ● ● ●) и снежного барса (модельные ———, натурные ****) по годам.*

Они на рисунках обозначены ● ● ● ● ● — для винторогого козла, ****** — для снежного барса. На рис. 4 изображена динамика численности винторогого козла и его хищников в течение 9 лет. Как видно из рисунков, из-за нехватки информации имеется некоторое расхождение между модельными и натурными данными (15% – 18%).

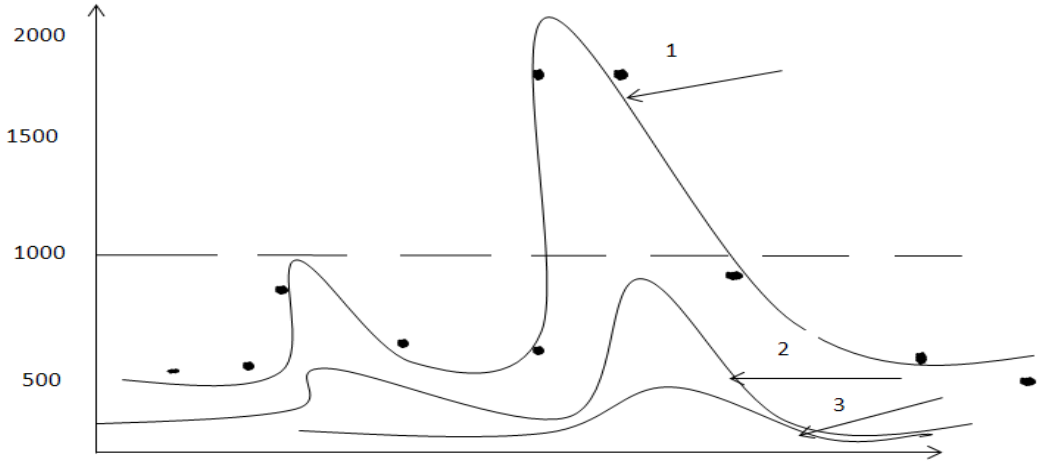


Рис. 5 *Динамика численности популяций экосистем трех трофических уровней (растительность-винторогий козел-снежный барс).*

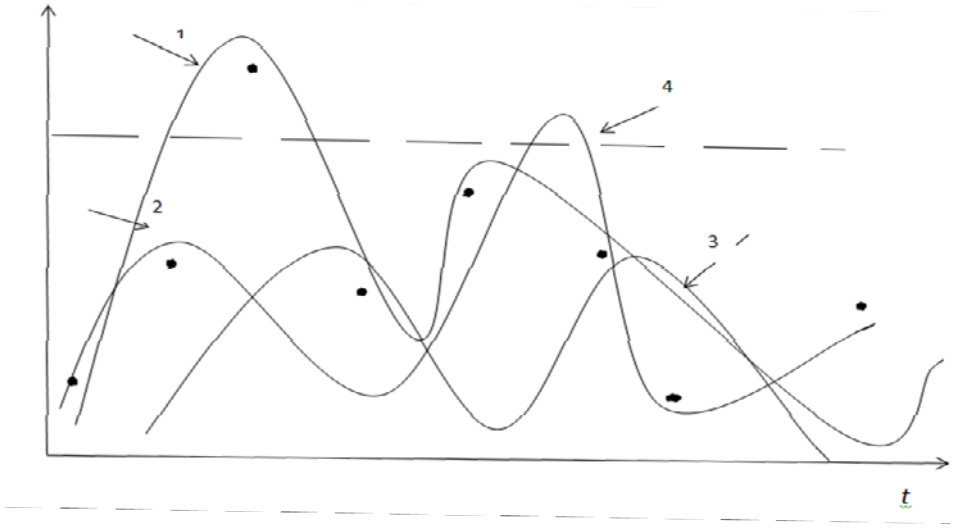


Рис. 6. *Динамика численности популяций экосистем трех трофических уровней (растительность-винторогий козел-снежный барс) с учетом критических значений.*

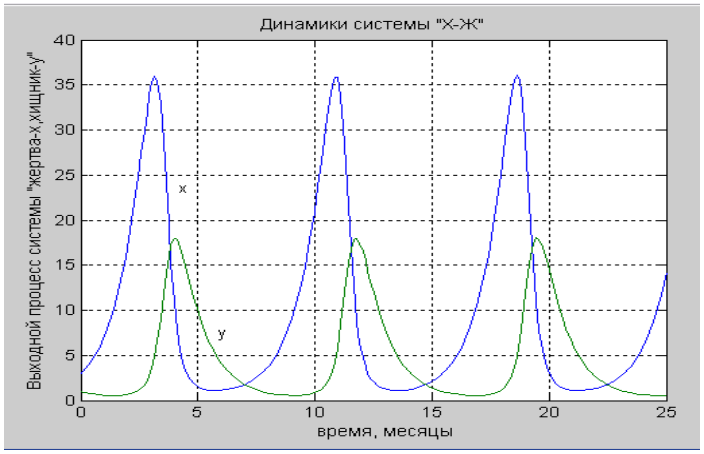


Рис. 7. *Динамика численности популяций систем (винторогий козел-снежный барс.*

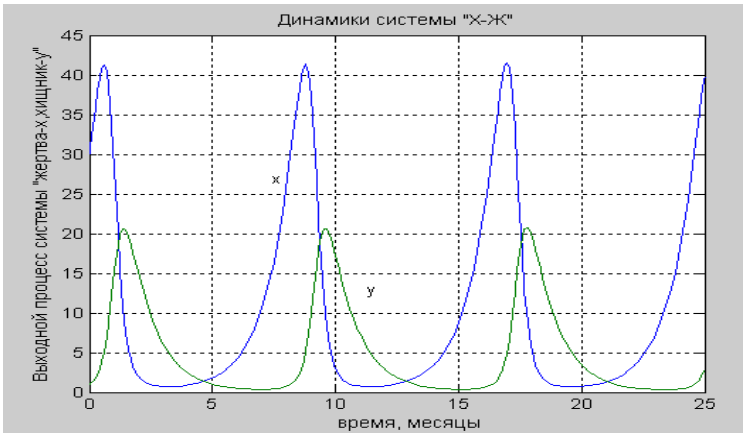


Рис. 8. *Динамика численности популяций систем (винторогий козел-снежный барс). a=0,2, b=0,1, y0=[3;1]*

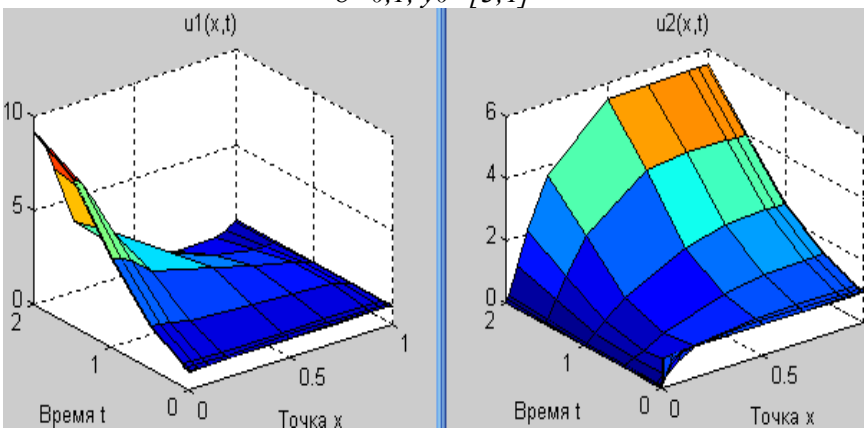


Рис. 9. *Динамика численности популяций систем «винторогий козел-снежный барс».*

ЛИТЕРАТУРА:

1. Абдусаломов И. Заповедник «Тигровая балка» // Кн. Заповедники Советского Союза. – М.: Колос, 1969. – С. 432-437.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
3. Заповедник «Тигровая балка». – Сталинабад: Дониш, 1959. – 200 с.
4. Логофет Д.О., Юнусов М.К. Вопросы качественной устойчивости и регуляризации в динамических моделях агробиоценоза хлопчатника // Вопросы кибернетики, вып. 52. – М.: Наука, 1979. – С. 62-74.
5. Юнуси(ов) М. Определение критических значений для популяции входящих в экосистемы трех трофических уровней // Журнал общей биологии, т. XLIII. – №6, «Наука», 1982. – С. 836-841.

6. Юнуси(ов) М., Асимова Г. Об анализе качественной устойчивости некоторых экосистем заповедника «Тигровая балка» // Известия АН Тадж. ССР, отд. биол. Наук. – 1980, № 4. – с. 86-92.
7. Юнуси(ов) М.К. Оптимальное управление в биосистеме «хищник-жертва» // Известия АН Тадж. ССР, отд. физ.-мат. наук, 1981. – № 2. – С. 81-85.
8. Юнуси(ов) М.К. Математическая модель динамики насекомых-вредителей с учетом их возрастной структуры // Известия АН Тадж. ССР, отд. физ.-мат. наук, 1982. – № 1. – С. 103-105.
9. Юнуси(ов) в М.К. Оптимальное управление экосистемой трех трофических уровней. // Докл. АН Тадж. ССР, 1987, т. 30. – № 5. – С. 277-281.
10. Юнуси(ов) М.К. Об одном классе нелокальных задач. –М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 30 с.
11. Юнуси(ов) М.К. Математические модели защиты растений и охраны популяций животных. – Душанбе, 1988. – 29 с.
12. Юнуси(ов) М.К. Некоторые математические вопросы охраны популяций животных // Докл. АН Тадж. ССР, - 1989, т.32. –№ 2. – С. 87-92.
13. Юнуси(ов) в М.К. Решение одного класса интегро-дифференциальных задач и его приложения в биологии. – Душанбе, 1989. – 53 с.
14. Юнуси М.К. Математические модели охраняемых популяции. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 29 с.
15. Yunusi M. Investigation of some nonlinear singular model ecosystems and new concerned mathematical problems. J. Ecological Modelling,Volume 216, Issue 2, 2008. – P. 172-177.
16. Юнуси М.К. Математические модели борьбы с вредителями агроценозы. – Душанбе: Дониш, 1991. – 142 с.
17. Юнуси (ов) М.К. Докторская диссертация. – М.: ВЦ АН СССР, 1990. – 304 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ЧИСЛЕННОСТИ ХИЩНИКОВ ЭКОСИСТЕМ РЕГИОНАЛЬНЫХ ЗАПОВЕДНИКОВ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

Работа посвящена разработке моделей и методов исследования задачи управления охраняемых биологических популяций, которая и состоит в моделировании процесса охраны ценных биологических видов систем (заповедников, заказников). При этом, для ценных или редких видов задаются наиболее эффективные диапазоны изменения их численности (естественно, эти границы зависят от параметров рассмотренного заповедника, заказника и т.д.), а границы изменения численности остальных биологических видов определяются с учетом решения данной задачи – охраны численности ценных или редких видов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математическая модель, численность, трофические уровни, биомасса, популяция, экосистема.

MATHEMATICAL MODELS FOR ESTIMATING ABUNDANCE OF PREDATORS ECOSYSTEM REGIONAL RESERVES OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN

Work is devoted to development of models and methods of the study objectives of the management of protected biological populations which consists in modeling the process of protecting valuable biological systems (reserves, sanctuaries). For valuable or rare species are set to the most effective ranges of their number (of course, these bounds depend on the parameters of the considered reserve, reserve, etc.), and the borders of change of the number of other species are determined by the solution of this problem – conservation of the number of valuable or rare species.

KEY WORDS: mathematical model, numbers, trophic levels, biomass, population, ecosystem.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Юнуси Махмадюсуф Камарович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики ТНУ. Тел.:(+992) 96-360-49-49.

Одинаева Сафаргул Атабековна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедры математического и компьютерного моделирования ТНУ.

Махмадалиев Хукмиддин Саймуминович, преподаватель кафедры информатики КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 915-26-46-66.

Гулов Самандар Хасанбекович, преподаватель кафедры информатики КТГУ имени Носира Хусрава.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ НЕРАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ АСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОЙ СИСТЕМЫ

Муродов Ф.Р., Муродов К.Ф., Бобокалонов Н.Р., Дилшоджони С. Дж.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

По существу, для описания неравновесного состояния жидкостей, состоящих из несферических молекул, мы имеем две сохраняющиеся величины:

$$\hat{n}(\vec{X}_I\theta_I) = \sum_{I=1}^{N} \delta(\vec{X}_I - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_I - \vec{\theta}) - \quad (1)$$

- динамическая плотность число частиц; и

$$\hat{H}(\vec{X},\vec{\theta}) = \sum_{I=1}^{N} (\frac{Pi^2}{2m} + \frac{1}{2}\frac{M_i^{\alpha} M_i^{\beta}}{I_{\alpha\beta}} + \frac{1}{2}\sum_{J\neq I}^{N} \Phi_{IJ}(\vec{X}_{ij},\vec{\theta}_i,,\vec{\theta}j))\delta(\vec{X}i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}i - \vec{\theta}) \quad (2)$$

-динамическая плотность энергии системы. Поэтому, будем исходить из исследования закономерности временной эволюции динамических плотностей этих фундаментальных сохраняющихся величин. Дифференцируя (1) по времени, получим

$$\frac{\partial \hat{n}(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X^{\alpha}}\sum_{i=1} \dot{X}_i^{\alpha}\delta(\vec{X}_i - \vec{X}) - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}}\sum_{i=1} \dot{\theta}_i^{\alpha}\delta(\vec{X}i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}) \cdot \quad (3)$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial\delta(\vec{X}_i - \vec{X})}{\partial \vec{X}_i} = -\frac{\partial\delta(\vec{X}_i - \vec{X})}{\partial \vec{X}}$ и $\frac{\partial\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}_i} = -\frac{\partial\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}}$.

С учетом (3), можно записать в виде:

$$\frac{\partial \hat{n}(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial t} = -\frac{\partial(\hat{j}_t^{\,2}(\vec{X},\vec{\theta}) + \hat{n}(\vec{X},\vec{\theta})u^{\alpha}(\vec{X},t)}{\partial X^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial \theta^{\alpha}}(a^{\alpha\beta}(\hat{J}_r^{\,\beta}(\vec{X},\vec{\theta}) + \hat{n}\omega^{\beta}), \quad (4)$$

где $\hat{J}_t^{\,\alpha}(\vec{X},\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\breve{P}_i^{\,\alpha}}{m}\delta(\vec{X}_i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}i - \vec{\theta})$,

$$\hat{J}_r^{\,\alpha}(\vec{X},\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} I_{\alpha\beta}^{-1}\breve{M}_i^{\,\beta}\delta(\vec{X}_i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}) \quad (5)$$

- динамические плотности вектора потоков числа частиц, обусловленных поступательными (t) и вращательными (r) степенями свободы молекул; $\breve{\vec{P}}_i = \vec{P}_i - m\vec{u}(\vec{X}_i t)$ и $\breve{\vec{M}}_i = \vec{M}_i - I\cdot\vec{\omega}(\vec{X},t)$ - значения импульса и момента импульса молекул в сопровождающей жидкость системе координат; $\vec{u}(\vec{x},t)$ и $\vec{\omega}(x,t)$- макроскопические скорости поступательного и вращательного движения жидкости; и было использована определение

$$a^{\alpha\beta}\hat{J}_r^{\,\beta}(\vec{X},\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} a_i^{\alpha\beta}\ I_{\beta\gamma}^{-1}\breve{M}_i^{\gamma}\ \delta(\vec{X}_c - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}) \quad (6)$$

Как видно, уравнение временной эволюции динамической плотности числа частиц (4) имеет вид известного закона сохранения вещества (в конфигурационном пространстве координат и углов).

Однако, это уравнение не является макроскопическим уравнением непрерывности, характеризующим неравновесное состояние жидкой системы. Оно написано для значения динамических величин в фазовых переменных, определяемых микроскопическими выражениями (1) и (5). Кроме того, уравнение (4) не является замкнутым уравнением. Его нельзя применять для изучения конкретных явлений и процессов. Для замыкания этого уравнения, как минимум, необходимо знать значения векторов $\hat{J}_t(\vec{X},\vec{\theta}), \hat{J}_r(\vec{X},\vec{\theta})$ в любой момент времени. Если определить значения этих

векторов по известному закону Фика, то для неподвижной жидкости $(\vec{u};\vec{\omega}=0)$, получим обычное диффузионное уравнение, с помощью которого можно исследовать стационарные диффузионные процессы.

При динамических неравновесных процессах, когда под действием внешнего возмущения состояние системы постоянно меняется, необходимо знать значения плотности векторов диффузионных потоков $\hat{J}_t(\vec{X},\vec{\theta}),\hat{J}_r(\vec{X},\vec{\theta})$ в каждый момент времени. Естественно, для реализации этой цели необходимо иметь соответствующие уравнения, описывающие закономерности изменения этих векторов во времени. Дифференцируя (5) по времени, получим:

$$\frac{\partial\hat{J}_t^{\alpha}(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial t}+\hat{n}(\vec{X},\vec{\theta})\frac{du^{\alpha}(\vec{X},t)}{dt}+\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial X^{\beta}}(\hat{P}_{kt}^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})+\hat{J}_t^{\alpha}(\vec{X},\vec{\theta})u^{\beta}(\vec{X},t)+$$
$$+\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\theta^{\beta}}(a^{\beta\gamma}(\hat{P}_{tr}^{\alpha\gamma}(\vec{X},\vec{\theta})+\hat{J}_t^{\alpha}(\vec{X},\vec{\theta})\omega^{\gamma}(\vec{X},t))+\hat{J}_t^{\beta}(\vec{X},\vec{\theta})\frac{\partial u^{\alpha}(\vec{X}_i,t)}{\partial X^{\beta}}=\frac{\hat{F}^{\alpha}(\vec{X},\vec{\theta})}{m}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\hat{J}_r^{\alpha}(\vec{X},\vec{\theta})}{\partial t}+I_{\alpha\beta}^{-1}\frac{\partial}{\partial X^{\gamma}}(\hat{P}_{rt}^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})+u^{\gamma}(\vec{X}_i,t)\hat{J}_r^{\beta}(\vec{X},\vec{\theta}))+\vec{n}(\vec{X},\vec{\theta})\frac{d\omega^{\alpha}(\vec{X},t)}{dt}+$$
$$+\hat{J}_t^{\gamma}(\vec{X},\vec{\theta})\frac{\partial\omega^{\alpha}(\vec{X},t)}{\partial X^{\gamma}}+I_{\alpha\beta}^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta^{\gamma}}(a^{\gamma\upsilon}(\hat{P}_{kr}^{\upsilon\beta}(\vec{X},\vec{\theta})+\omega^{\upsilon}(\vec{X},t)\hat{J}_r^{\beta}(\vec{X},\vec{\theta}))=I_{\alpha\beta}^{-1}\hat{N}^{\beta}(\vec{X},\vec{\theta}),$$

где
$$\hat{P}_{kt}^{\alpha\beta}(\vec{X}_i\theta)=\sum_{t=1}^{N}\frac{\breve{P}_i^{\alpha}\breve{P}_i^{\beta}}{m}\delta(\vec{X}_i-\vec{X})\delta(\vec{\theta}_i-\vec{\theta}),$$
$$\hat{P}_{kt}^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})=\sum_{t+1}^{N}\frac{\breve{M}_i^{\alpha}\breve{M}_i^{\beta}}{I_{\beta\gamma}}\delta(\vec{X}_i-\vec{X})\delta(\vec{\theta}_i-\vec{\theta}), \tag{8}$$

- динамические плотности кинетических частей тензоров напряжения (или тензора переноса импульса и момента импульса), обусловленных поступательными (t) и вращательными (r) степенями свободы молекул жидкости; эти тензора имеют и потенциальные части. В литературе много примеров определения потенциальной части $\hat{P}_t^{\alpha\beta}$. В предположении о том, что взаимосвязь между $\vec{\theta}_i,\vec{\theta}_j$ с N_{ij} такая же, что и взаимосвязь между $\vec{X}_i,\vec{X}_j$ и F_{ij}, для определения потенциальной части $\hat{P}_r^{\alpha\beta}$ можно использовать операции приведенные в [3]. Тогда для потенциальных частей тензоров $\hat{P}_t^{\alpha\beta}$ и $\hat{P}_r^{\alpha\beta}$ легко можно получить выражения

$$\hat{P}_{nt}^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j\neq i=1}^{N}F_{ij}^{\alpha}X_{ij}^{\beta}\delta(\vec{X}_i-\vec{X})\delta(\vec{\theta}_i-\vec{\theta}) \tag{9}$$
$$\hat{P}_{nr}^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\sum_{j\neq i=1}^{N}N_{ij}^{i\alpha}b_i^{\beta\upsilon}\theta_{ij}^{\upsilon}\delta(\vec{X}_i-\vec{X})\delta(\vec{\theta}_i-\vec{\theta})$$

и для полного значения этих тензоров находим

$$\hat{P}_t^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})=\sum_{i=1}^{N}(\frac{\breve{P}_i^{\alpha}\breve{P}_i^{\beta}}{m}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=i}^{N}F_{ij}^{\alpha}X_{ij}^{\beta})\delta(\vec{X}_i-\vec{X})\delta(\vec{\theta}_i-\vec{\theta}), \tag{10}$$
$$\hat{P}_r^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})=\sum_{i=1}^{N}(\frac{\breve{M}_i^{\alpha}\breve{M}_i^{\gamma}}{I_{\beta\gamma}}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=i}^{N}N_{ij}^{1\alpha}b_i^{\beta\gamma}\theta_{ij}^{\gamma})\delta(\vec{X}_i-\vec{X})\delta(\vec{\theta}_i-\vec{\theta}).$$

Здесь использованы обозначения: $\vec{X}_{ij}=\vec{X}_i-\vec{X}_j$; $\vec{\theta}_{ij}=\vec{\theta}_i-\vec{\theta}_j$; $N_{ij}^{1\alpha}=N_{ij}^{\alpha}+[\vec{X}_{ij}\vec{F}_{ij}]^{\alpha}$; и условия (4). Можно показать, что потенциальные части тензоров $\hat{P}_t^{\alpha\beta}$, $\hat{P}_r^{\alpha\beta}$ легко получаются при статистическом усреднении уравнения (7) преобразованием локально-равновесных частей средних значений плотности векторов $\hat{\vec{F}}(\vec{X},\vec{\theta})$ *и* $\hat{\vec{N}}(\vec{X},\vec{\theta})$. Тензора перекрестного переноса поступательного импульса вращательными

движениями молекул и переноса момента импульса поступательными движениями молекул

$$\hat{P}_{tr}^{\alpha\beta}(\vec{X}_i\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\breve{P}_i^{\alpha}\breve{M}_i^{\gamma}}{I_{\beta\gamma}}\delta(\vec{X}_i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}),$$

$$\hat{P}_{rt}^{\alpha\beta}(\vec{X}_i\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\breve{M}_i^{\alpha}\breve{P}_i^{\beta}}{m}\delta(\vec{X}_i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}) \qquad (11)$$

не имеют потенциальные части. В других работах, где рассматриваются аналогичные задачи, такие перекрестные тензора также имеют только кинетические части. Формально, по вышеприведенной процедуре можно сформировать потенциальные части и для этих тензоров, если предположить, что зависимость F_{ij} от θ_{ij} и N_{ij} от X_{ij} такая же, как зависимость F_{ij} от X_{ij} и N_{ij} от θ_{ij}. Однако, здесь, мы этим предположением не воспользуемся и для определения этих тензоров используем выражения (11).

Из (11) видно что $$\dot{P}_{tr}^{\alpha\beta}(\vec{X}_i\vec{\theta}) = \frac{m}{J_{\beta\gamma}} \cdot \hat{P}_{rt}^{\alpha\gamma}(\vec{X}_i\vec{\theta}). \qquad (12)$$

В уравнениях $$\hat{F}^{\alpha}(\vec{X}_i\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} F_{ij}^{\alpha}\delta(\vec{X}_i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}),$$

$$\hat{N}^{\alpha}(\vec{X}_i\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i} N_{ij}^{\alpha}\delta(\vec{X}_i - \vec{X})\delta(\vec{\theta}_i - \vec{\theta}) \qquad (13)$$

- локальные динамические плотности сил и моментов сил, действующих на молекулы жидкости; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}(\vec{X}_i t)\frac{\partial}{\partial \vec{X}}$ - полная или субстанциональная производная по времени. Уравнения (7) для векторов $\hat{J}_t^{\alpha}(\vec{X}_i\vec{\theta})$ и $\hat{J}_r^{\alpha}(\vec{X}_i\vec{\theta})$ являются сложной системой взаимосвязанных уравнений. Эта система уравнений даже при известном значении макроскопических величин ($\vec{u}$ и $\vec{\omega}$) не становится замкнутой относительно динамических величин $\hat{n}(\vec{X}_i\theta)$ $J_t^{\alpha}(\vec{X}_i\vec{\theta})$ и $J_r^{\alpha}(\vec{X}_i\vec{\theta})$. Поэтому использовать их для описания конкретных явлений и жидких систем не возможно. Для замыкания этой системы как минимум необходимо знать значения тензоров $\hat{P}^{\alpha\beta}(\vec{X},\vec{\theta})$ в любой момент времени и выразить их через $\hat{n}, \hat{J}_t, \hat{J}_r$. Чтобы определить значения тензоров $\hat{P}^{\alpha\beta}(\vec{X}_i\vec{\theta})$ в любой момент времени, необходимо продифференцировать выражения (10) и (11) по времени и установить закономерности изменения их во времени. Такие уравнения для исследования вязкоупругих свойств асимметричных жидкостей получены в работах. Поскольку, здесь в рамках нашей задачи исследование динамических вязкоупругих и термоупругих свойств жидкостей и их влияние на процессы массопереноса в асимметричных жидкостях не предусмотрено, мы не будем выводить такие уравнения. Ограничимся рассмотрением тех выражений, которые позволяют исследовать динамические процессы массопереноса, и при необходимости воспользуемся результатами работы.

Полученные уравнения для изменения динамических плотностей параметров, характеризующих неравновесное состояние жидкой системы, будут использованы в дальнейшем для построения локально-равновесной и неравновесной функции распределения. Эти уравнения также являются основой для формулировки релаксационных уравнений обобщенной гидродинамики, позволяющих исследовать динамические процессы массопереноса в асимметричных жидкостях.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.: Гостхимиздат, 1946. – 19 с.

2. Фишер И.З. Статистическая теория жидкостей. – М.: Физматгиз, 1961. – 280 с.
3. Коваленко И.П., Фишер И.З. Метод интегральных уравнений в статистической теории жидкостей // ИУФН, 1972. - 108, Вып. 2. - С. 209-239.
4. Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. – Киев: Наукова думка, 1983. – 372 с.
5. Марч Н., Тоси М. Движение атомов жидкости. – М.: Металлургия, 1980. – 296 с.
6. Физика простых жидкостей. Статистическая теория. – М.: Мир, 1971. - 308 с.
7. Крокстон К. Физика жидкого состояния. – М.: Мир, 1978. – 400 с.
8. Гиршфельдер Дж, Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. – М.: Иностранная литература, 1961. – 930 с.
9. Френнель Я.И. Собрание избранных трудов Т.3. Кинетическая теория жидкостей. – М. – Л.: Издательство АН СССР, 1959. – 458 с.
10. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа неидеальной плазмы. - М.: Наука, 1975. – 352 с.
11. Коен Э. Дж. Д. Введение в кинетическую теорию жидкостей / Сб. Физика за рубежом. – М.: Мир, 1986. - С. 73-93.
12. Kirkwood J. G., Buff F. P., Green M. S. The statistical mechanical theory of transport processes. III.-The coefficients of shear and Bulk Viscosity of liquids // Chem.phys.-1949. - V. 17, №10. – PP. 988-994.
13. Kirkwood J.G. The statistical mechanical theory of transport processes. I General theory // Chem.phys. – 1946. - V. 14, №3. - PP. 180-201.
14. Zwanzig R., Kirkwood J.G., Oppenheim J., Alder B.J. Statistical mechanical theory of transport processes VII-The coefficient of thermal conduc-tivity of monatomic liquids // Chem. Phys, 1954. - V. 22, №5. - PP. 783-790.

ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ НЕРАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ АСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОЙ СИСТЕМЫ

В статье говорится об определении главных понятий перехода коэффициента массы в асимметрической жидкости, и динамических диффузионных случаев природы, которые можно исползовать для построения локально-равновесной и неравновсеной функции распределения. Говориться о качестве таких случаев, относящих к составу внутри жидкости и влияние внешнего развития.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: жидкость, горюче-смазочные материалы, хладагенты, космические и авиационные реактивные установки, атомные энергетические сооружения, спектр, внешнее возмущение, динамическое состояние.

LOCAL CONSERVATION LAWS OF DYNAMICAL QUANTITIES CHARACTERIZING THE NONEQUILIBRIUM STATE OF ASYMMETRIC LIQUID SYSTEM

The article talks about the definition of the main concepts of the transition of the ratio of the mass in asymmetric fluid and dynamic diffusion of cases of nature. The quality of the cases pertinent to the composition in the liquid and the influence of external development.

KEY WORDS: liquid fuel, lubricants, refrigerants, application, space and aviation turbine installation of nuclear power facilities, facilities, external disturbances, dynamic state

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Муродов Файзидин Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой организации автомобильных перевозок и управления строительством КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 918-52-00-29.

Муродов Комилджон Файзидинович, преподаватель частной гимназии имени Аминджона г. Курган-Тюбе. Тел.: (+992) 917-14-69-64.

Бобокалонов Наврузбек Раджабович, преподаватель кафедры организации автомобильных перевозок и управления строительством КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 93-548-64-63.

Дилшодджони Сайкабири Джалолзода, преподаватель кафедры организации автомобильных перевозок и управления строительством КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 917-70-70-60.

УДК 612. 12. 34

ВЗАИМОСВЯЗЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГИДРАЗИНЗАМЕЩЕННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

Тургунбаев М.Т., Хусайнов З.К., Сафаров Ш.Р.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава
Сафаров М.М.
Душанбинский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова
Зарипова М.А.,
Таджикский технический университет имени академика М.С. Осими

Для установления взаимосвязи теплопроводности и плотности некоторых гидразинзамещенных водных растворов при атмосферном давлении и различных температурах нами использована следующая функциональная зависимость.

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = f\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right), \tag{1}$$

где: λ, λ_1–теплопроводность исследуемых объектов при температурах T и T_1; ρ, ρ_1 – плотность исследуемых объектов при температурах T и T_1; T_1 = 293 К.

Выполнимость зависимости (1) для гидразинзамешенных водных растворов показана на рис. 1, из которого видно, что экспериментальные точки хорошо укладываются вдоль общей кривой. Уравнение этой линии для гидразинзамещенных водных растворов имеет вид:

$$\lambda = \left[9{,}15\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 - 21{,}73\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + 13{,}58\right] \cdot \lambda_1 \cdot \tag{2}$$

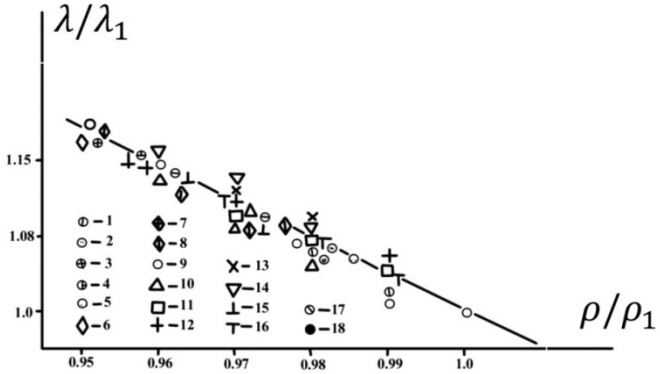


Рис. 1. Зависимость относительной теплопроводности (λ/λ_1) от относительной плотности (ρ/ρ_1) водных растворов при атмосферном давлении.

Зная экспериментальные значения плотности объектов в зависимости от температуры по формуле (2) с погрешностью 2 –3% можно вычислить температурную зависимость теплопроводности гидразинзамещенных водных растворов при атмосферном давлении, если известно значение λ_1 .

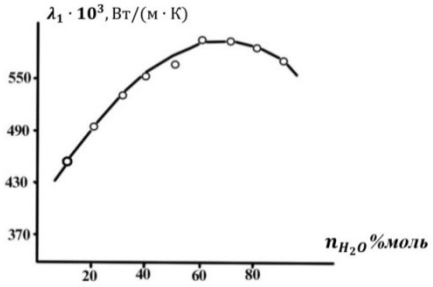


Рис. 2. Зависимость λ_1 от n_{H_2O} для водных растворов гидразина и аэрозина

Интересно было бы в формуле (2) λ_1 связать с мольной концентрацией воды n_{H_2O}. Зависимость λ_1 от мольной концентрации воды n_{H_2O} показана на рисунке 2.

Графики зависимости λ_1от n_{H_2O} для водных растворов гидразина и фенилгидразина показаны на рисунок 3 и 4.

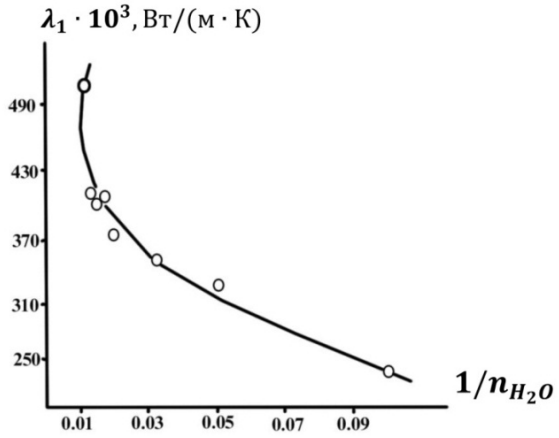


Рис. 3. Зависимость λ_1от $1/n_{H_2O}$ для водных растворов аэрозина и диметилгидразина.

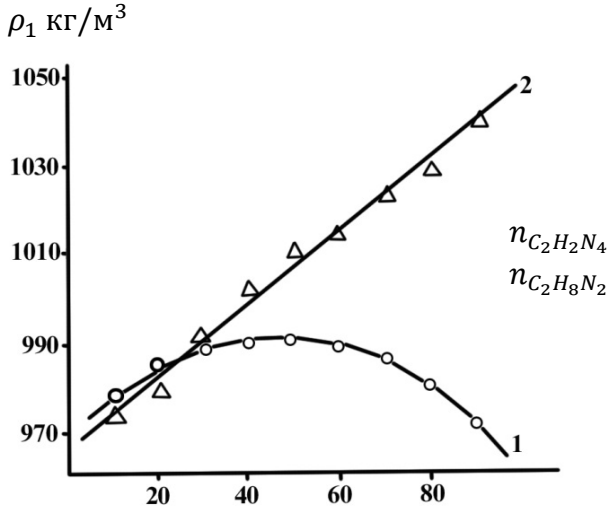


Рис. 4. Зависимость ρ_1 от $n_{C_2H_2N_4}$, $n_{C_2H_8N_2}$, - для водных растворов аэрозина и диметилгидразина.

$$\lambda_1 = -3{,}91 \cdot 10^{-5} n_{H_2O}^2 + 5{,}41 \cdot 10^{-3} n_{H_2O} + 0{,}404, \text{ Вт/(м К)}$$

$$\lambda_1 = 43{,}165\left(\frac{1}{n_{H_2O}}\right)^2 - 7{,}378\left(\frac{1}{n_{H_2O}}\right) + 0{,}558, \text{ Вт/(м К)}$$

для водных растворов диметилгидразина:

$$\lambda = \left[9{,}15\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 - 21{,}73\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + 13{,}58\right] \cdot (-3{,}91 \cdot 10^{-5} n_{H_2O}^2 + 5{,}41 \cdot 10^{-3} n_{H_2O} + 0{,}404) \text{ Вт/(мК)} \quad (3)$$

для водных растворов аэрозина

Из уравнения (2) с учетом выражение λ_1 получим:

$$\lambda = \left[9{,}15\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 - 21{,}73\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) + 13{,}58\right]\left[\ 43{,}165\left(\frac{1}{n_{H_2O}}\right)^2 - 7{,}378\left(\frac{1}{n_{H_2O}}\right) + 0{,}558\ \right].\ \text{Вт/(мК)} \qquad (4)$$

В уравнениях (3) и (4) ρ_1 являются функцией $n_{N_2H_4}$ и, $n_{C_6H_8N_2}$ которая показана на рисунок 2.

Уравнение этих кривых имеет вид:

для водных растворов диметилгидразина и аэрозина

$$\rho_1 = \sqrt{-19{,}57\, n^2_{N_2H_4} + 1683{,}3 n_{N_2H_4} + 10{,}25 \cdot 10^5}\ ,\ \text{кг/м}^3 \qquad (5)$$

$$\rho_1 = -4{,}21 \cdot 10^{-3} n^2_{C_6H_8N_2} + 1{,}23 n_{C_6H_8N_2} + 1000\ \text{кг/м}^3 \qquad (6)$$

Из уравнений (2–6) для гидрозинзамешенных водных растворов аэрозина и диметилгидразина соответственно получим:

$$\lambda = \left[\frac{9{,}15\rho^2}{\left(-19{,}57\, n^2_{C_2H_{12}N_4} + 1683{,}3 n_{C_2H_{12}N_4} + 10{,}25 \cdot 10^5\right)} - \frac{21{,}73\rho}{-19{,}57\, n^2_{C_2H_{12}N_4} + 1683{,}3 n_{C_2H_{12}N_4} + 10{,}25 \cdot 10^5} + 13{,}28\right]$$

$$\text{x}\left(-3{,}91 \cdot 10^{-5} n^2_{H_2O} + 5{,}41 \cdot 10^{-3} n_{H_2O} + 0{,}404\right), \text{Вт/(м К)} \qquad (7)$$

$$\lambda = \left[\frac{9{,}15\rho^2}{\left(-4{,}21 \cdot 10^{-3} n^2_{C_2H_8N_2} + 1{,}23 n_{C_2H_8N_2} + 1000\right)^2} - \frac{21{,}73\rho}{-4{,}21 \cdot 10^{-3} n^2_{C_2H_8N_2} + 1{,}23 n_{C_2H_8N_2} + 1000} + 13{,}28\right]$$

$$\left[\ 43{,}165\left(\frac{1}{n_{H_2O}}\right)^2 - 7{,}378\left(\frac{1}{n_{H_2O}}\right) + 0{,}558\ \right], \quad \text{Вт/(м К)} \qquad (8)$$

Все численные значения, входящие в уравнения (7) и (8), имеют размерность. По уравнениям (3), (4), (7), (8), зная мольную концентрацию n_{H2O}, n_{C2H8N2} и $n_{C2H12N4}$ и температурную зависимость плотности, можно вычислить теплопроводность экспериментально неисследованных гидразинзамещенных водных растворов.

Уравнения (3), (4), (7), (8) с погрешностью 2-4% описывают температурную зависимость теплопроводности исследуемых растворов при атмосферном давлении.

Для установления взаимосвязи теплопроводности гидразинзамещенных и плотности водных растворов при высоких параметрах состояния исходя из теории термодинамического подобия, использовали следующую функциональную зависимость:

$$\left(\frac{\lambda_{P,T}}{\lambda_{P_1,T_1}}\right) / \left(\frac{\lambda_{P,T}}{\lambda_{P_1,T_1}}\right)_1 = f\left[\left(\frac{\rho_{P,T}}{\rho_{P_1,T_1}}\right) / \left(\frac{\rho_{P,T}}{\rho_{P_1,T_1}}\right)_1\right], \qquad (9)$$

где, $\lambda_{P,T}$ – теплопроводность при давлении P и температуре T; $\lambda_{P1,T1}$ - теплопроводность при давлении P_1 и T_1; ($\lambda_{P,T}$ / $\lambda_{P1,T1}$) - значения ($\lambda_{P,T}$ / $\lambda_{P1,T1}$) при ($\rho_{P,T}$ / $\rho_{P1,T1}$); ($\rho_{P,T}$ / $\rho_{P1,T1}$) = 1,09; P_1 = 4,91 МПа и T_1 = 473 К.

Используя выражения (9) и (12-14) для расчета теплопроводности водных растворов гидразина, аэрозина, диметилгидразина и фенилгидразина в зависимости от температуры и давления получим:

$$\lambda = \left(1{,}135 - 8{,}75 \cdot 10^{-2}\frac{P}{P_2}\right)\left(-2{,}798 \cdot 10^{-5} n^2_{H_2O} + 1{,}656 \cdot 10^{-3} n_{H_2O} + 1{,}035\right)\left(8{,}31 \cdot 10^{-2}\frac{P}{P_2} + 0{,}917\right)$$

$$\left(-9{,}052\cdot10^{-5}T_X^2+4{,}943\cdot10^{-2}T_X-6{,}7\right)\sqrt{\frac{-17{,}96\rho_{P,T}^2}{\left(3{,}417\cdot10^{-2}P/P_2+0{,}965\right)\left(-3{,}369\cdot10^{-2}n^2_{C_2H_{12}N_4}+3{,}475n_{C_2H_{12}N_4}+859{,}3\right)^2}+}$$

$$\sqrt{+\frac{38{,}24\rho_{P,T}}{\left(3{,}417\cdot10^{-2}P/P_2+0{,}965\right)\left(-3{,}369\cdot10^{-2}n^2_{C_2H_{12}N_4}+3{,}475n_{C_2H_{12}N_4}+859{,}3\right)}}-19{,}36 \text{ Вт/(мК)} \quad (10)$$

Уравнение (10) устанавливает взаимосвязь теплопроводности с плотностью растворов при различных температурах и давлениях, а также с температурой кипения, мольной концентрацией воды, гидразина и аэрозина. По уравнению (10) при наличии экспериментальных значений плотности растворов гидразина при различных температурах и давлениях можно вычислить их теплопроводность в зависимости от температуры и давления. Проверка уравнения (10) показала, что среднеарифметическая погрешность вычисленных значений теплопроводности в интервале температур 293-553 К и давлений 0,101-98,1 МПа не превышает 1,81%.

Для расчета теплопроводности водных растворов диметилгидразина получили следующее выражение, устанавливающее взаимосвязь между теплопроводностью и его плотностью:

$$\lambda_{P,T}=\left(0{,}978+7{,}37\cdot10^{-10}P\right)\left(-1{,}37\cdot10^{-5}n^2_{H_2O}+4{,}05\cdot10^{-4}n_{H_2O}+1{,}046\right)\left(2{,}096\cdot10^{-9}P+0{,}947\right)$$

$$\left(-2{,}9\cdot10^{-5}T_X^2+2{,}38\cdot10^{-2}T_X-4{,}34\right)\sqrt{-\frac{24{,}45\rho_{P,T}^2}{\left(1{,}59\cdot10^{-9}P\right)\left(-8{,}82\cdot10^{-3}n^2_{C_2H_8N_2}+1{,}74n_{C_2H_8N_2}+897{,}1\right)^2}+}$$

$$\sqrt{\frac{45{,}26\rho_{P,T}}{\left(1{,}59\cdot10^{-9}P\right)\left(-8{,}82\cdot10^{-3}n^2_{C_2H_8N_2}+1{,}74n_{C_2H_8N_2}+897{,}1\right)}}-21{,}71 \quad \text{т/(м К)} \qquad (11)$$

С помощью этого уравнения, зная значения плотности в широком интервале температур и давлений, можно рассчитать теплопроводность этих веществ со среднеарифметической погрешностью 3,2%.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Сафаров М.М. Об одном методе расчета термодинамических свойства водных растворов фенилгидразина // П. Пулатов, М.М. Сафаров, М.А. Зарипова // ИФЖ. Т. 72. - №2. – Минск, 1999. – С. 386-387.
2. Сафаров М.М. Уравнение состояния двухкомпонентных водных растворов / М.М. Сафаров, М.А. Зарипова, У.У. Косимов. // – Казань, 2002. - С. 6-7.
3. Гусейнов К.Д. Исследование термодинамических и переносных свойств ряда кислородосодержащих органических веществ в широком интервале параметров состояния / К.Д. Гусейнов // Автореф. дисс.…д-ра техн. наук.– Баку, 1979. - 60 с.
4. Варгафтик Н.Б. Теплопроводность жидкостей и газов / Н.Б. Варгафтик., Л.П. Филлипов, А.А. Тарзиманов, Е.Е. Тоцкий // – М.: Изд. стандартов, 1978. – 472 с.
5. Тургунбаев М.Т. Экспериментальная установка для измерения теплофизических свойств изоляционных материалов / М.М. Сафаров, М.Т. Тургунбаев, М.А. Зарипова, С.А. Тагоев // Материалы 2 Межсимпозума. - Канада, 1997. - С. 340.
6. Тургунбаев М.Т. Теплопроводность водных растворов диметилгидразина в широком интерале температур и давлений / М.М. Сафаров, М.Т. Тургунбаев, М. А. Зарипова // ИФЖ. Т.71. - №3. 1998. - Минск. - С. 375-383.

ВЗАИМОСВЯЗЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГИДРАЗИНЗАМЕЩЕННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ

В статье описано взаимосвязь теплопроводности и плотности некоторых гидразинзамещенных водных растворов при атмосферном давлении и различных температурах в функциональной зависимости от температуры кипения, мольной концентрацией воды, диметилгидразина и аэрозина.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: теплопроводность, плотность, диметилгидразин, аэрозин, температура.

THERMAL CONDUCTIVITY INTERCONNECTION AND DENSITY OF SOME GIDRAZINZAMESCHENNYH WATER SOLUTIONS AT ATMOSPHERIC PRESSURE

This article describes the interconnection of thermal conductivity and density hydrosubstituted certain aqueous solutions at atmospheric pressure and temperatures in the various functional relationship with boiling water molar concentration aerozina and dimethylhydrazine.

KEY WORDS: thermal conductivity, density, dimethylhydrazine, aerozina, temperature.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Тургунбаев Мусажон Турсуналиевич, кандидат технических наук, ст. преподаватель кафедры общей физики КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 985-03-23-40.

Сафаров Махмадали Махмадиевич, доктор технических наук, профессор Душанбинского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. Тел.: (+992) 95-163-15-85.

Зарипова Мохира Абдусаломовна, кандидат технических наук, доцент кафедры теплотехники и теплотехнических оборудований ТТУ имени академика М.С. Осими. Тел.: (+992) 501-24-44-33.

Хусайнов Зубайдулло Курбоналиевич заведующий лабораторией кафедры общей физики КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 985-55-82-62.

Сафаров Шохин Рустамович, преподаватель кафедры общей физики КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 907-39-36-51.

О ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ОМА В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Раупов Н.М., Абдурахмонов Г.Т, Рахимов З.С., Назаров Х.Х.
Институт энергетики Таджикистана

Как известно, электрический ток в проводнике представляет собой упорядоченное движение электронов. Сила тока – это число электрических зарядов, проходящих через поперечное сечение провода за одну секунду. Переменный ток меняет значение и направление определенное число раз в секунду. При переменном токе электроны движутся по проводнику сначала в одном направлении, затем на момент останавливаются, далее движутся в обратную сторону, опять останавливаются и снова повторяют движение вперед и назад. Синусоидальный переменный ток частотой 50 Гц в течение времени 0,01 с направлен в одну сторону, в течение следующих 0,01 с – в другую.

Согласно закону Ома ток и напряжение строго пропорциональны друг другу независимо от вида сопротивления в электрической цепи. Величины тока и напряжения в любой момент имеют определенное соотношение в зависимости от сопротивления цепи и всегда имеют одинаковое направление. Мгновенные значения тока и напряжения также пропорциональны. Электрические и магнитные поля, создаваемые электрическим напряжением и током, изменяют свою величину и направление пропорционально величине тока и напряжения, т.е. с такой же частотой, какая у тока и напряжения.

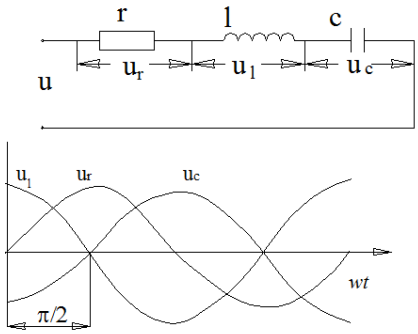


Рис.1.

Напряжения на индуктивном и емкостном сопротивлении сдвинуты относительно напряжения на активном сопротивлении на 90 градусов в ту и другую стороны [1]. Это также является общепринятым и сомнению не подлежит (рис. 1).

Реактивные мощности, создаваемые индуктивностью и емкостью, пропорциональны изменению магнитных и электрических полей. Это значит, что реактивные мощности не могут иметь отличную частоту от частоты тока и напряжения.

Согласно закону Ома мгновенные значения тока в каждом элементе должны меняться пропорционально мгновенным значениям напряжения. Такое может иметь место при совпадении векторов тока и напряжения. Однако, в учебниках ТОЭ [1, 2, 3] принято, что напряжение в цепи индуктивности и емкости сдвинуто на 90 градусов в ту или иную сторону, а направление тока считают таким как в цепи активного сопротивления. Это приводит, во - первых, к нарушению закона Ома. В цепи индуктивного и емкостного сопротивления соотношение тока и напряжения теряет пропорциональность. Во-вторых, произведение мгновенных значений тока и напряжения (мощность) в цепи индуктивности и емкости математически получается со сдвоенной частотой (рис. 2) за счет того, что ток или напряжение через каждые 90 градусов имеет нулевое значение, в-третьих, мгновенные значения полной мощности (сумма активной и реактивной) становятся несимметричными (рис. 5). Положительная полуволна не равна обратной полуволне.

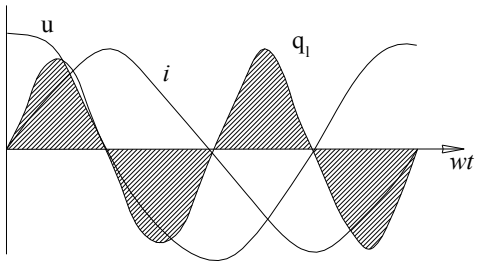


Рис. 2.

Ниже нами приводится ряд доводов, почему необходимо пересмотреть приводимое в учебниках ТОЭ ошибочное положение о наличии сдвига векторов тока и напряжения в цепи индуктивности и емкости, вследствие чего сделаны неверные выводы.

Принятие сдвига векторов тока и напряжения в 90 градусов противоречит закону Ома. При таком сдвиге при максимальном напряжении (при амплитудном значении) ток равен нулю, и, наоборот, при напряжении, равном нулю, ток равен максимальному значению (рис. 3), что противоречит физическому процессу.

Индуктивная и емкостная мощности не могут изменяться с частотой в 2 раза больше, чем частота изменения тока и напряжения. Мгновенные их значения меняются пропорционально изменению мгновенных значений тока и напряжения, то есть с частотой 50 Гц.

Максимальные мгновенные значения реактивных мощностей при принятом сдвиге между током и напряжением в 90 градусов получаются в два раза меньше, чем обычно считают на практике. Так амплитудное значение реактивной мощности равно при угле, равном 45 градусов от начала отсчета тока, и опережении напряжения на 90 градусов (рис. 3).

$$Q_m = I_m \sin 45^o \; U_m \sin (45^o + 90^o) = 0{,}707 * 0{,}707 = 0{,}5 I_m U_m$$

в 2 раза меньше, чем в случае совпадения фаз тока и напряжения, в то время как в действительности в треугольнике мощностей (рис. 4) реактивная мощность

определяется исходя не из долей действующих значений, а из целой величины тока и напряжения.

Для определения напряжений на индуктивном и емкостном сопротивлении на практике применяют закон Ома. Напряжение и ток в цепях индуктивности и емкости пропорциональны. Если считать, что есть сдвиг векторов между ними, пропорциональность нарушается.

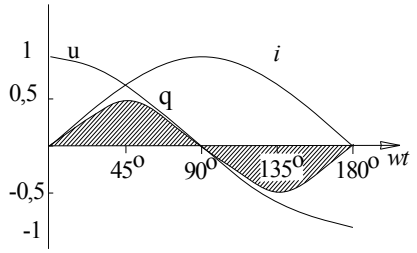


Рис. 3.

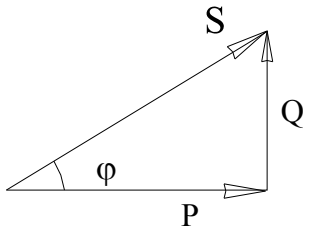


Рис. 4.

Расчеты показывают, что при сдвиге тока и напряжения на 90 градусов изменения мгновенных значений полной мощности S получается несимметричной (рис. 5), одна полуволна значительно больше, чем другая полуволна, чего не может быть в физике процесса. Ток и напряжение меняются по синусоиде по так называемой гармонической кривой, которая является строго симметричной. Положительные и отрицательные полуволны тока имеют разные направления потоков электронов. Без каких-либо преобразователей, без вмешательства извне часть электронов не может изменить направление движения на обратное, так как мощности пропорциональны токам, а токи определяются потоком электронов, которые имеют равные потоки в обе стороны, поэтому несимметричность не может иметь места.

В некоторых учебниках [1] считают, что активная мощность состоит только из положительных полуволн (рис. 5). Это противоречит действительности. Отрицательная полуволна активной мощности не может изменить направление на обратное. Это не соответствует физике процесса. Такое предположение было принято на основе законов математики: произведение двух отрицательных чисел получается положительным. В данном случае математическое действие не соответствует реальной физической картине.

Активная мощность имеет такую же частоту, какую имеют ток и напряжение, она пропорциональна $\sin^2 wt$

$$p = I_м \sin wt * U_м \sin wt = I_м U_м \sin^2 wt.$$

Выражение $\sin^2 wt$ преобразовывают в (1-cos2wt) и на этом основании полагают, что активная мощность имеет двойную частоту. Здесь допущена ошибка, заключающаяся в том, что преобразование тригонометрической функции, относящейся к прямоугольному треугольнику, никак нельзя переносить на синусоиду изменения тока и напряжения во времени. Кто-то решил, что если реактивные мощности приобретают двойную частоту, то и активная тоже должна иметь такую же частоту и путем математических преобразований ошибочно обосновал, что активная мощность тоже имеет двойную частоту, что противоречит физике процесса.

Опыт проектирования и эксплуатации электрооборудования (генераторов, трансформаторов и др.), линий электропередач и двигателей показывают, что частота 100 Гц нигде в расчетах не применяется. Все расчеты проводятся по частоте 50 Гц. Например, число оборотов генераторов и двигателей рассчитываются на частоту 50 Гц, индуктивное и емкостное сопротивление элементов системы рассчитывают по частоте 50 Гц. Замеры в любой части электрической системы не подтверждают наличие частоты в 100 Гц. Имеющаяся автоматика в электрической системе также рассчиты-

вается на частоту 50 Гц, например, АЧР (автоматическая частотная разгрузка). Индукционные счетчики активной и реактивной энергий также рассчитываются на 50 Гц.

Согласно закону Ома, кривые изменения тока и напряжения должны соответствовать друг другу. Различные изменения кривых тока и напряжения должны быть строго идентичными.

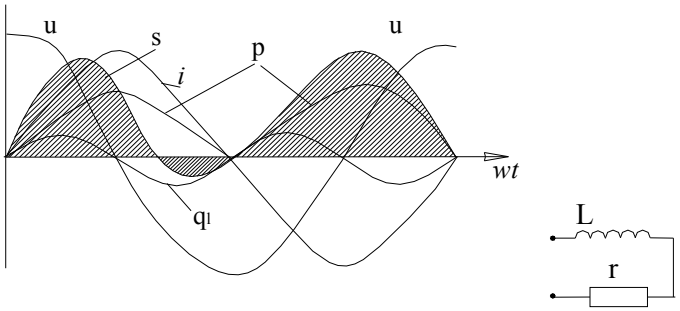


Рис. 5.

Направления тока, напряжения и мощности в каждом элементе цепи совпадают друг с другом. О том, что направления напряжений и мощностей совпадают общеизвестно из векторных диаграмм треугольников напряжений и мощностей. Так как ток имеет такое же направление, какое у напряжения, мы можем говорить о том, что все три вектора тока, напряжения и мощности совпадают между собой. В цепях индуктивности и емкости все они имеют сдвиг на 90 градусов по отношению к активному току, напряжению и мощности. В цепях индуктивности и емкости они имеют противоположные направления (рис. 6). Треугольники, сопротивлений, напряжений и мощностей (рис.7) всегда подобны друг другу.

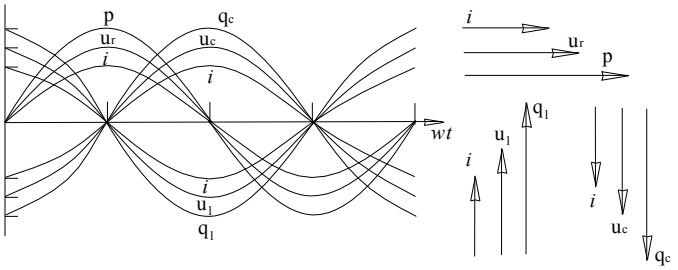


Рис. 6.

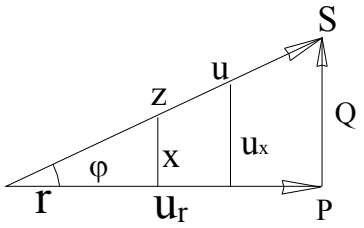


Рис. 7.

Отказ от положения, что ток и напряжение имеют сдвиг векторов, ставит все на свои места. Во-первых, не нарушается закон Ома, во-вторых, можно утверждать об отсутствии удвоения частоты, в-третьих, при суммировании графиков мгновенных значений активной и реактивных мощностей, их синусоидальность, симметричность не нарушаются, и, в-четвертых, самое главное - графики мгновенных значений приходят в соответствие с треугольниками напряжений и мощностей (рис. 8). Угол сдвига векторов активной мощности и полной мощности φ в графике мгновенных значений и в треугольнике мощностей совпадают, что очень важно - все стало на свои места.

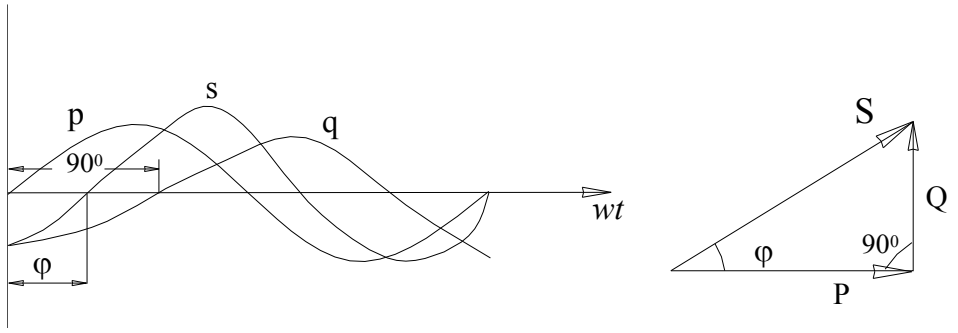


Рис. 8.

Имеющиеся в учебниках ТОЭ вышеперечисленные ошибочные теоретические положения продолжают иметь место, и не отражаются в практических расчетах по причине того, что эти ошибочные положения не применяются. Так в практических расчетах всегда принимают частоту 50 Гц, при определении реактивных сопротивлений и мощностей исходят из частоты 50 Гц. В учебниках по энергетике нигде не упоминаются об удвоении частоты. Практика не сталкивалась с этим неверным теоретическим предположением. Однако, ошибка о наличии сдвига фаз между током и напряжением продолжает фигурировать в учебниках по ТОЭ и других.

Так как вектора тока и напряжения совпадают, мгновенные значения реактивных мощностей изменяются по следующему выражению

$$q = I_м \sin(wt + (-)90^o)\, U_м \sin(wt + (-)90^o) = I_м U_м \sin^2(wt + (-)90^o),$$

то есть они не пропорциональны двойному углу, а квадрату синуса угла.

Имеются доказательства, взятые из самых учебников, что нет сдвига векторов между током и напряжением. Так, в третьей главе [3, 126], посвященной основным понятиям и законам теории электрических цепей приводится рисунок, где указаны совпадающие направления тока и напряжения в цепях активного, емкостного и индуктивного сопротивлений. Следующее доказательство: в четвертой главе [3] приводятся формулы, касающиеся закона Ома для амплитудных значений напряжения и тока, по которым видно, что они пропорциональны. Они могут быть пропорциональными только при совпадении их векторов.

Ещё одним доказательством того, что вместе с напряжением происходит и сдвиг ток на тот же угол в емкости и индуктивности по отношению к напряжению в активном сопротивлении, является следующее. В параллельной схеме принят сдвиг тока между токами в 180° в цепи емкости и индуктивности, а в последовательной схеме принят сдвиг напряжений в 180° в емкости и индуктивности. Ток и напряжение не могут иметь противоположные направления, значит, они имеют совпадающие направления, то есть, нет сдвига фаз между током и напряжением.

В литературе нередко встречаются сведения о совпадении векторов тока и напряжения в любой цепи. Также часто некоторые ошибочно принимают, что имеется сдвиг между векторами тока и напряжения в электрической цепи.

Угол сдвига между векторами активного и полного сопротивлений, который определяет угол между векторами активной составляющей и полного напряжений и соответственно активной мощности и полной мощности (рис. 7) принимают за угол между напряжением и током, что является ошибкой.

ВЫВОДЫ: Ошибочное принятие наличия сдвига между векторами тока и напряжения в цепи индуктивности и емкости нарушает закон Ома, приводит к неправильному выводу, что реактивные мощности имеют двойную частоту, и что их сумма становится несинусоидальной и несимметричной. Нами приводится целый ряд доводов и доказательств того, что для мгновенных значений тока и напряжения также должен соблюдаться закон Ома для любого участка электрической цепи. Все мощности

имеют такую же частоту, какая у тока и напряжения, при таком рассмотрении все параметры хорошо согласуются между собой и становятся на свои места.

Показано, что не всегда результаты математических действий соответствуют физическому процессу. На практике расчеты и измерения не подтверждают предположения об удвоении частоты, что, в свою очередь, дает основание говорить об отсутствии сдвига между векторами тока и напряжения в любой цепи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч.1. - М.: Госэнергоиздат, 1962.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. - М.: Высшая школа, 1999.
3. Нейман Л. Р., Демерчян К. С. Теоретические основы электротехники, ч. 1. - Л. Госэнергоиздат, 1981.
4. Борисов Ю. М. и др. Электротехника. - М.: Энергоатомиздат, 1985.

О ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ОМА В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В статье доказывается, что ошибочное принятие наличия сдвига между векторами тока и напряжения в цепи индуктивности и емкости, которое противоречит закону Ома, привело к неправильному выводу о двойной частоте реактивной мощности. Авторами приводятся доводы и доказательства о соблюдении закона Ома для любого участка электрической цепи.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: электрический ток, проводник, электроны, заряд, синусоидальный, сдвиг, мощность, мгновенное значение, амплитуда, направление, сопротивление, гармоническая кривая, эксплуатация, частота.

ON THE APPLICABILITY OF OHM'S LAW IN THE CIRCUIT SINUSOIDAL CURRENT

This article proves that the erroneous acceptance of the presence of shift between vectors of voltage and current in the circuit inductance and capacitance, which is contrary to Ohm's law, led to the wrong conclusion on the double-frequency reactive power. The authors provide the arguments and evidence on compliance with Ohm's law for any part of an electric circuit.

KEY WORDS: electric current, conductor, electrons, charge, sine, shift, power, instantaneous value, amplitude, direction, impedance, harmonic curve, explaitation frequency.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Раупов Насим Мамашарипович, апирант ИЭТ. Тел.: (+992) 987-89-23-88.

Абдурахмонов Гулмурод Тагоймуродович, ст. преподаватель кафедры автоматизации электроприводов ИЭТ. Тел.: (+992) 93-587-97-94.

Рахимов Зафар Сайдалиевич, ассистент кафедры электростанций и электрических сетей ИЭТ. Тел.: (+992) 915-55-99-53.

Назаров Хайриддин Хайруллоевич ассистент кафедры электростанций и электрических сетей ИЭТ. Тел.: (+992) 918-58-68-50.

ПРИМЕНЕНИЕ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ В ЮЖНЫХ РЕГИОНАХ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

Сафаров М.Г., Раупов Н.М., Раҳимов З.С.
Институт энергетики Таджикистана

Таджикистан расположен в самой северной части субтропической зоны земного шара. Климат Таджикистана характеризуется большими суточными и сезонными колебаниями температуры воздуха, интенсивной солнечной радиацией, сухостью воздуха и малой облачностью.

Формирование климата Таджикистана происходит в результате взаимодействия ряда факторов, обусловленных, прежде всего его географическим положением, устройством поверхности, циркуляцией атмосферы и солнечной радиацией, имеющей среди них наиболее существенное значение. Особенность географического положения Таджикистана заключается в том, что он лежит вдали от открытых морей и океанов,

внутри материка Евразии. Поэтому его климат континентальный: характеризуется резкими сезонными и суточными колебаниями метеорологических элементов. Сравнительно холодная зима резко переходит в дождливую весну, но последняя также быстро сменяется сухим летом, почти при полном отсутствии осадков в течение нескольких месяцев (исключение составляют высокогорные районы Памира).

Средняя годовая температура воздуха изменяется по территории республики в широких пределах от 17,2 на юге (Айвадж, Шаартуз) до - 6,9^{0}С на Памире (Ледник Федченко). В долинах Юго-Западного Таджикистана средне- годовая температура воздуха составляет 14-17^{0}С, температура самого холодного месяца (январь) - плюс 2^{0}С, 0^{0}С, в июле 28-32^{0}С. В долинах Северного Таджикистана в январе среднемесячная температура воздуха отрицательная и достигает -2^{0}С, в июле она составляет около 30^{0}С, средняя годовая температура воздуха 14^0-15^{0}С.

Средемесячная, средняя годовая температура воздуха, абсолютный минимум, абсолютный максимум, °С

Название станции	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год	Абс. Макс	Абс. Мин
Душанбе	2,2	4,2	9,1	15,8	19,8	24,8	26,9	24,8	19,9	14,0	8,5	4,2	14,5	43,0	-27,0
Гиссар	1,3	3,0	8,7	15,3	20,7	24,3	26,6	24,3	19,3	13,4	8,4	4,0	14,2	43,0	-25,0
Исанбай	2,0	4,6	10,0	16,2	21,8	27,8	30,5	33,8	23,4	16,1	8,9	4,2	16,2	47,0	-27,0
Файэабад	0,4	1,2	6,2	12,9	17,5	22,4	25,6	24,1	19,4	13,5	7,8	2,9	12,8	41,0	-26,0
Ходжент	-0,8	2 П	9,7	16,1	21,9	26,8	28,6	26,6	21,1	13,5	6,8	1,5	14,5	46,0	-31,0
Пенджикент	-0,4	1,5	6,6	12,9	17,7	22,6	25,1	23,5	18,6	12,4	6,1	1,9	12,4	42,0	-28,0
Истаравшан	-1,8	0,1	4,9	11,8	17,2	22,1	24,8	22,9	17,6	11,1	4,6	0,2	11,3	42,0	-29,0
Исфара	-1,5	1,2	7,1	14,6	20,0	24,4	26,6	24,9	19,6	12,5	5,4	0,6	13,0	42,0	-25,0
Сангистон	-1,3	1,5	5,8	12,0	16,2	20,6	24,0	23,2	18,4	12,0	5,1	0,6	11,5	40,0	-26,0
Курган-Тюбе	1,8	5,4	10,8	17,4	22,5	27,1	28,6	26,4	21,2	15,9	9,0	4,1	15,8	46,0	-26,0
Куляб	2,3	5,4	10,4	16,7	21,5	27,2	30,2	28,5	23,4	16,9	10,0	4,8	16,4	46,0	-24,0
Дангара	1,4	4,0	9,4	15,5	20,2	25,9	29,2	27,6	22,0	15,4	8,7	3,7	15,3	45,0	-27,0
Пархар	2,1	5,6	11,0	17,4	22,5	27,1	38,8	26,8	21,8	15,5	8,9	4,1	15,9	46,0	-28,0
Пяндж	1,9	5,4	10,8	17,4	23,1	27,5	29,1	27,0	21,8	15,7	9,1	4,1	16,0	45,0	-27,0
Шаартуз	3,0	6,1	11,3	18,3	24,2	30,4	30,6	28,7	22,9	16,5	9,7	4,9	17,2	47,0	-23,0
Яван	3,7	5,8	11,0	17,3	21,9	28,1	30,5	28,7	23,9	17,5	10,8	6,0	17,1	45,0	-26,0
Хорог	-7,6	-5,3	1,2	9,7	14,8	19,2	22,7	22,8	18,2	10,8	3,4	-3,4	8,9	38,0	-32,0
Рушан	-5,0	-3,5	5,0	11,3	15,7	19,1	22,9	24,0	17,6	9,7	4,1	-1,8	10,0	36,0	-30,0
Мургаб	-17,3	-13,5	-6,6	0,4	5,4	9,4	13,2	12,8	7,2	-0,4	-8,6	-15,3	-1,1	33,0	-47,0
Ишкашим	-8,3	-5,0	1,2	7,7	12,2	16,2	19,6	19,4	15,1	8,3	0,8	-5,5	6,8	35,0	-32,0
Калай-Хумб	-1,7	0,2	5,8	12,2	16,7	21,2	25,1	25,7	20,6	12,9	6,2	1,5	12,2	42,0	-23,0

Среднегодовая продолжительность солнечного сияния колеблется в пределах 2097-3166 часов. В дни зимнего солнцестояния высота солнца достигает 28°С, а в дни летнего - поднимается над горизонтом до 75°С. В связи с этим на территории Таджикистана среднегодовое количество суммарной радиации достигает 151-176 ккал/см.

Так как солнце является основным источником всех видов получаемой на нашей планете энергии, в настоящее время пристальное внимание уделяется прямому использованию солнечной энергии. Солнце излучает ежесекундно $370 \cdot 10^{12}$ ТДж теплоты. Из этого количества на Землю попадает в энергетическом эквиваленте только $1{,}2 \cdot 10^5$ ТВт, т.е. за год $38 \cdot 10^{20}$ кВт.ч, или в 108 раз больше, чем сегодня потребляется в мире. При определении практической целесообразности использования солнечной энергии исходят из того, что максимальная плотность энергии солнечного излучения достигает 1 кВт/м^2. Однако такая плотность имеет место в течение 1–2 часов в разгар летнего дня в экваториальных широтах. В большинстве районов планеты средняя плотность энергии солнечного излучения составляет 200-300 Вт/м^2. Основное направление утилизации солнечной теплоты базируется на использовании схем с концентрированием солнечной энергии посредством зеркал или линз. Существует много способов преобразования солнечной энергии в электрическую. К таким регионам

Таджикистана относится Шаартузкий район и территория Айваджа, где температура воздуха, по данным синоптиков достигает до 40^0С. Эффективный для большой энергетики является паротурбинный способ, аналогичный, применяемому на обычных ТЭС. Такой способ применения энергии солнца в республике еще не применялось. Использование солнечных электростанции при прибрежных участках, где не далеко протекает река Амударья, является приемлемым использовать два типа солнечных электростанций (СЭС): башенные СЭС и СЭС с солнечными прудами.

Солнечные электростанции башенного типа. В районах с большим числом солнечных дней в году целесообразно сооружение солнечных электростанций башенного типа которая размещена на большой площади. Фокусирующие элементы (гелиостаты) улавливают солнечные лучи и концентрируют их, направляя на паровой котел, установленный на вершине башни. При высоте башни 200-300 метров мощность такой станции может достигать 100 МВт при КПД, равном 17%.

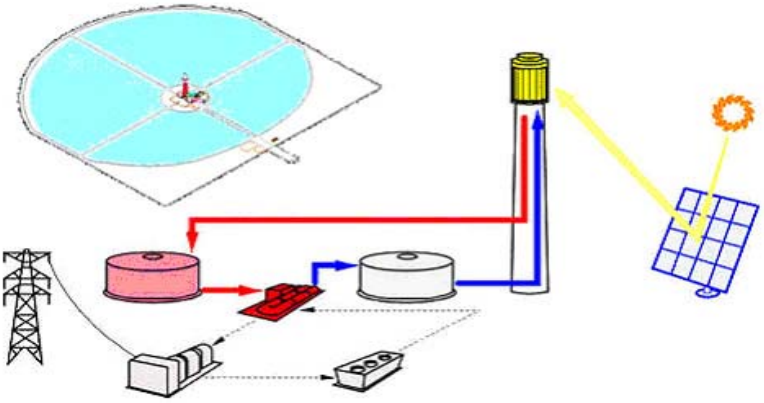


Рис 1. Солнечные электростанции башенного типа.

Прерывистый характер солнечной радиации приводит к тому, что она не может использоваться как гарантированный источник электроэнергии. Для повышения надежности электроснабжения в технологическую схему СЭС включают аккумулятор энергии. Как правило, осуществляется аккумулирование теплоты. При этом используются две схемы накопления тепловой энергии: последовательная и параллельная.

В первой схеме тепловой накопитель располагается между приемником и теплообменником. Нагретый в теплоприемнике теплоноситель расходуется на выработку электроэнергии и загрузку аккумулятора. При отсутствии солнечной радиации необходимая теплота передается рабочему телу от аккумулятора.

Во второй схеме заряд аккумулятора обеспечивается отведением части нагретого рабочего тела, а связь с турбоустановкой осуществляется без промежуточных устройств.

Потери при преобразовании энергии солнечного излучения в ЭЭ складываются из геотермических потерь, зависящих от угла падения и затемнения, потерь на отражение и поглощение, тепловых потерь в приемнике и тепло в аккумуляторе.

Солнечные пруды. Другой способ использования солнечной энергии основан на том, что в водоем на различных уровнях вводится разное количество солей. При этом создаются слои (страты) солевого раствора с неодинаковой концентрацией и плотностью. Нижние слои, имеющие более высокую концентрацию и плотность, нагреваются под действием солнечной радиации более интенсивно. Технологическая схема использования возникающего температурного градиента проста: горячая вода (60–90°С) из нижних слоев подается в теплообменник и используется для испарения жидкости с низкой температурой кипения (фреон, пропан, аммиак). Пары этой жидкости приводят во вращение турбоагрегат.

Фотоэлектрические электростанции. В фотоэлектрических станциях используется явление фотоэффекта, который подразделяется на три вида:

- внешний фотоэффект, представляющий собой вырывание электронов из поверхности металла под действием светового потока;
- внутренний фотоэффект – изменение электропроводности полупроводников и диэлектриков под действием света;
- фотоэффект запирающего слоя, заключающийся в следующем. При соприкосновении полупроводников, имеющих электронную (n-тип) и дырочную (p-тип) проводимости, на границе раздела образуется контактная разность потенциалов вследствие диффузии электронов. Если полупроводник p – типа освещается, то его электроны, поглощая кванты света, переходят в полупроводник с электронной проводимостью.

Для энергетических целей применим последний вид фотоэффекта. Устройства, реализующие данный вид фотоэффекта, называются фотоэлектрическими преобразователями (ФЭП).

Для снижения стоимости ФЭП и повышения их общей эффективности используются различные системы концентрирования солнечного излучения: полимерные оптические линзы; линзы френеля с точечной фокусировкой.

Выводы: Использование возобновляемых источников энергии в южных территориях Республики Таджикистан по многим причинам целесообразно. В дальнейшей перспективе возобновляемые источники энергии играют важнейшую роль для жизнедеятельности и энергопотребления каждого гражданина Республики Таджикистан.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Р. Б. Ахмедов, И. В. Баум, В. А. Пожарнов, В. М. Чаховский. Солнечные электрические станции. Сер. «Гелиоэнергетика» (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – М., 1986. - 120 с.
2. Ресурсы и эффективность использования возобновляемых источников энергии в России / П.П. Безруких, Ю.Д. Арбузов, Г.А. Борисов и др. - СПб.: Наука, 2002. -314 с.
3. Твайделл Д. Возобновляемые источники энергии. - М.: Энергоатомиздат, 1990. - 390 с.
4. Девинс Д. Энергия: Пер. с англ. / Д. Девинс. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 360 с.
5. Виссарионов В.И. Экологические аспекты возобновляемых источников энергии / В.И. Виссарионов, Л.А. Золотов. - М.: МЭИ, 1996. - 156 с.

ПРИМЕНЕНИЕ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ В ЮЖНЫХ РЕГИОНАХ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

Авторы констатируют целесообразность использования возобновляемых источников энергии. На основе данных географического климата южных районов предлагают несколько способов преобразования солнечной энергии в электрическую.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: абсолютный минимум и максимум, электростанция, башенный тип, солнечный пруд, фотоэлектрические станции, электрон, полупроводник, диэлектрик.

THE APPLICATION OF SOLAR POWER STATIONS IN THE SOUTHERN REGIONS OF THE REPUBLIC OF TAJIKISTAN

The authors found the feasibility of using renewable energy sources. On the basis of geographical climate of the southern areas offer several ways to convert solar energy into electrical energy.

KEY WORDS: absolute minimum and maximum, power station, tower type, solar pond, photoelectric stations, electron, semiconductor, insulator.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Сафаров Муродали Гаффорович, ст. преподаватель кафедры электростанций и электрических сетей ИЭТ. Тел.: (+992) 902-00-00-64.

Раупов Насим Мамашарипович, аспирант ИЭТ. Тел.: (+992) 987-89-23-88.

Рахимов Зафар Сайдалиевич, ассистент кафедры электростанций и электрических сетей ИЭТ. Тел.: (+992) 915-55-99-53.

ТАҲЛИЛИ СИСТЕМАТИКИИ ЭНТАЛПИЯИ ҲОСИЛШАВИИ ИОНҲОИ ГАЗШАКЛИ ЛАНТАНОИДҲО

Мирсаидов У.М.
Агентии бехатарии ядроӣ ва химияи радиатсионии АИ Ҷумҳурии Тоҷикистон
Бадалов А.Б.
Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи ак. М. Осимӣ
Ғафуров Б.А.
Донишгоҳи давлатии тиббии Хатлон
Болтаев М.А.
Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав

Аз солҳои 70-уми қарни гузашта дар Пажӯҳишгоҳи химияи ба номи В.И. Никитини Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон ва кафедраи химияи умумии Донишгоҳи техникии Тоҷикистон ба номи академик М.С. Осимӣ корҳои илмӣ-таҳқиқотӣ оид ба омӯзиши пайвастҳои дорои энергияи зиёд – пайвастҳои гидрогении металлҳо ба роҳ монда шудааст.

Таҳқиқу омӯзиши ин пайвастҳо бо истифодаи усулҳои синтез ва таҳлили физикӣ – химиявии гуногун амалӣ гардонда мешавад. Яке аз чунин усулҳое, ки барои муайян намудани устувории термикии моддаҳо истифода бурда мешавад, усули тензиметрӣ мебошад. Дар ин усул мембранаи нул-манометр истифода бурда мешавад.

Ба воситаи усули тензиметрии мембранаи нул-манометр устувории боро- ва алюмоҳидридҳои металлҳои ишқорӣ, ишқорзаминӣ ва нодир омӯхта шуда, бо ин усул омӯзиши хосиятҳои термодинамикӣ ва термикии пайвастҳои комплексии ҳидридҳои металлҳои қатори актиноидӣ ба роҳ монда шудааст.

Солҳои охир дар ҳамкорӣ бо Агентии бехатарии ядроӣ ва химияи радиатсионии Академияи илмҳои Ҷумҳурии Тоҷикистон омӯзиши хосиятҳои термодинамикии пайвастҳои бинарӣ ва комплексии ҳидридҳои металлҳои гурӯҳҳои IA, IIA ва IIIA вусъат ёфта, таъсири омилҳои гуногун, аз қабили энталпия, энтропия ва энергияи Гиббс барои ҳосилшавии пайвастҳои ҳидридҳо омӯхта шудаанд. Аз ҷумла, омӯзиши бузургиҳои термодинамикии ионҳои дар ҳолати газшаклбудаи лантаноидҳо муқаррар карда шудаанд, ки онҳо дар муайян намудани қонуниятҳои термодинамикӣ аҳамияти хосро доранд.

Ба туфайли мавҷуд будани маълумот дар хусуси ҳар як зинаи даври ҳосилшавии ионҳои газшакли лантаноидҳо аз рӯи даври (сикли) Борн – Габер таҳлили систематикӣ ва ҳисобкуниҳои термохимиявиро амалӣ гардондан мумкин аст. Таҳлили адабиёти илмии оид ба энталпияи ҳосилшавии ионҳои газшакли лантаноидҳои дараҷаи оксидшавиаш +3 мавҷудбуда, яъне $\Delta_f H^{\circ}_{298}$ нишон медиҳанд, ки он хусусияти парокандаро доро аст [1].

Ҷадвали 1

Энталпияи ҳосилшавии $(\Delta_f H^0)$ *ионҳои газшакли лантаноидҳо*

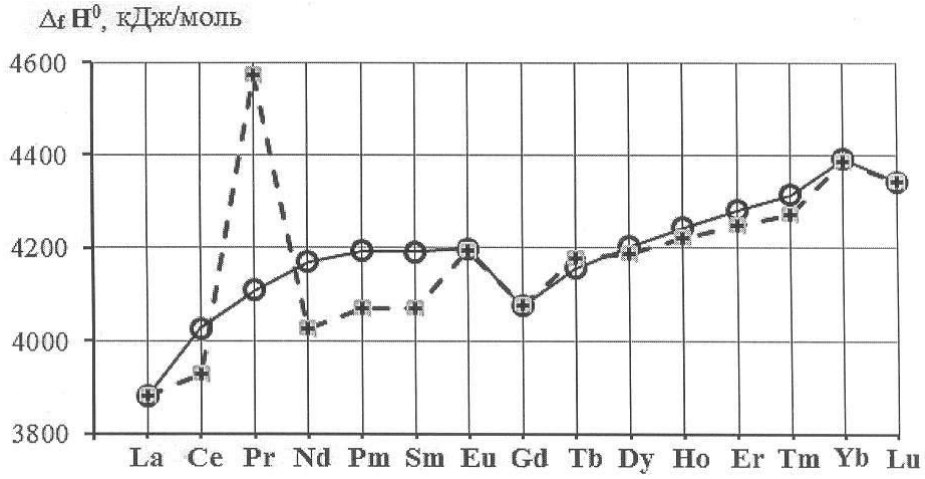
$\Delta_f H^0_{298}$, кДж·моль$^{-1}$	Лантаноидҳо														
	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
ҳисоб	3881	3971	4018	4056	4084	4102	4160	4076	4157	4202	4244	4281	4314	4392	4334
адабиёт	3881	3928	4571	4025	4071	4071	4193	4076	4176	4188	4221	4247	4273	4385	4334

Фарқият бо %	0,00	1,10	12,00	0,77	0,32	0,76	0,79	0,00	0,45	0,33	0,54	0,80	0,96	0,16	0,00

Барои саҳеҳ намудан ва ҳисоб кардани бузургии ҳосилшавии ионҳои газшакли лантаноидҳои дарачаи оксидшавиашон +3 $\Delta_f H^{\circ}_{298}$ усули нимэмпирикии Н.С. Полуэктов [2-3] истифода бурда мешавад. Қимати зарби коррелятсионии муодила, ки ба α=32,36; β=-9,00; $\gamma' = 9{,}83$ ва $\gamma'' = 4{,}04$ баробаранд, таъсири ҳар як тартибдиҳандаро нисбат ба бузургии $\Delta_f H^{\circ}_{298}$ ионҳои лантаноидҳо нишон медиҳад.

Натиҷаи ҳисобкунии энталпияи ($\Delta_f H^{\circ}_{298}$) газшакли ионҳои лантаноидҳо дар ҷадвали 1 оварда шудааст.

Тағйирёбии бузургии энталпияи ҳосилшавии ионҳои газшакли лантаноидҳо аз табиати химиявии онҳо вобастагӣ дорад. Ин вобастагӣ хусусияти мураккаб дошта, дар алоқамандӣ бо зергурӯҳҳо зоҳир мегардад. Каҷхатаи аз табиати лантаноидҳо вобаста будани тағйироти $\Delta_f H^{\circ}_{298}$ дар расми 1 оварда шудааст.



Расми 1. Вобастагии тағйирёбии энталпияи ҳосилшавии ионҳои газшакли (Ln^{3+}) аз табиати лантаноидҳо (○ -ҳисоб кардашуда, ✚ - ҳисоб аз адабиёт).

Аз рӯи тағйирёбии энталпияи ҳосилшавии ионҳо лантаноидҳоро ба ду зергурӯҳ тақсим менамоянд.

Ба зергурӯҳи якум, ки он зергурӯҳи серий ном гирифтааст, асосан ионҳои $\ln^{3+}, Ce^{3+}, P_2^{3+}, Nd^{3+}, \mathrm{Pm}^{3+}, Sin^{3+}, \mathrm{Eu}^{3+}$ мансуб мебошанд. Чи тавре, ки аз расм аён мегардад, дар байни узви ин зергурӯҳ зиёдшавии энталпия ($\Delta_f H^{\circ}_{298}$) ба мушоҳида расида, дар иони Pr^{3+} он ба максимум мерасад.

Зергурӯҳи дуюм ҳамчун зергурӯҳи иттрий маълум аст. Чи тавре аз расми 1 дидан мумкин аст, дар байни аъзои ин зергурӯҳ қимати $\Delta_f H^{\circ}_{298}$ ба таври хаттӣ зиёд мешавад. Ин тағйироти энталпия ба зиёдшавии рақами тартибии лантаноидҳо вобаста мебошад.

Аз қонунияти умумӣ майлкунии қимати $\Delta_f H^{\circ}_{298}$ дар ионҳои Eu^{3+} ва Yb^{3+} ба мушоҳида мерасад. Бояд қайд кард, ки ин майлкунӣ ба сохти махсуси онҳо алоқаманд аст. Чи тавре медонем, дар ин элементҳо бо электронҳо қисман ва ё пурра пуршавии *f*-орбиталҳо ба амал меояд.

Ба бузургии энталпияи ($\Delta_f H^{\circ}_{298}$) ионҳои лантаноидҳо $4f$-электронҳо таъсири ҳалкунанда мерасонанд, ки инро қимати калони собитаи α-и дар муодилаи коррелятсионӣ мавҷудбуда, тасдиқ менамояд.

Ҳангоми бо маълумоти дар адабиёти илмӣ мавҷудбуда муқоиса намудани қиматҳои энталпияи ҳосилшавии газшакли ионҳои ln^{3+}, ки ба туфайли таҷриба ба дасто варда шудаанд, маълум шуд, ки дар зергурӯҳи серий фарқият ба мушоҳида мерасад.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ионова, Г.В. Закономерности изменения свойств лантанидов и актинидов / Г.В. Ионова, В.Г. Вохмин, В.И. Спицын. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
2. Полуэктов, Н.С. Корреляционный анализ в физико-химии соединений трёхвалентных ионов лантаноидов / Н.С. Полуэктов, С.Б. Мешкова, Ю.В. Коровин, И.И. Оксиненко // Докл. АН СССР, 1982. – Т. 266. -№5. – С. 1157-1160.
3. Мешкова, С.Б. Гадолиниевый излом в ряду трёхвалентных лантаноидов / С.Б. Мешкова, Н.С. Полуэктов, З.М. Топилова, М.М. Данилкович // Координационная химия, 1986. - Т.12. - Вып.4. - С. 481-484.

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭНТАЛЬПИИ ОБРАЗОВАНИЯ ГАЗООБРАЗНЫХ ИОНОВ ЛАНТАНОИДОВ

Авторы подчеркивают, что благодаря сведениям о каждом этапе образования газообразных ионов лантаноидов по циклу Борн-Габера возможны систематический анализ и термохимическое исчисление. Приводится результаты исчисления энтальпии образования газообразных ионов лантаноидов и зависимость изменения энтальпии образования газообразных ионов от их химической природы лантаноидов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: водороное соединение металлов, синтез, химический анализ, тензиметрический метод, энтальпия, лантаноиды, исчисление, величина, подгруппа серий и иттрия, корреляционное уравнение.

A SYSTEMATIC ANALYSIS OF THE ENTHALPY FORMATION OF GASEOUS IONS OF THE LANTHANIDES

The authors emphasize that due to the details of each stage of formation of gaseous ions of lanthanides cycle Born-Haber possible a systematic analysis and thermochemical calculation. There are the results of the calculation entalpia the formation of gaseous ions of the lanthanides and the dependence of the formation of gaseous ions from their chemical nature of the lanthanides.

KEY WORDS: hydrogen combination of metals, synthesis, chemical analysis, tenzimethryc method, the enthalpy, the lanthanides, calculation, magnitude, subgroup series and yttrium, correlation equation.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Мирсаидов Улмас Мирсаидович, академик АН РТ, доктор химических наук, профессор, директор Агентства по ядерной безопасности и радиационной химии АН РТ.

Бадалов Абдулхайр Бадалович, доктор химических наук, профессор кафедры общей и неорганической химии ТТУ имени ак. М.С. Осими. Тел.: (+992) 93-571-21-25; e-mail: badalovab@mail.ru

Гафуров Бобомурод Абдукаххорович, доктор химических наук, доцент кафедры химии и медицинской биологии ХГМУ. Тел.: (+992) 917-10-02-22; e-mail: gafurov.bobomurod.64@mail.ru

Болтаев Малик Ажикович, кандидат химических наук, доцент кафедры общей химии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 917-43-37-97.

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ ДАНБУРИТОВОЙ РУДЫ МЕСТОРОЖДЕНИЯ АК-АРХАР

Маматов Э.Д., Сулаймони М.А.
Институт химии имени В.И. Никитина АН Республики Таджикистан
Рахматуллоева М.Ш., Расулов У.З., Хидиров М.С.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

Защита окружающей среды от промышленных выбросов и переработка отходов производства, представляет интерес с экономической и экологической точки зрения. В последнее время исследуется возможность замены дорогих материалов на доступные и более дешевые как искусственного (выбросы газов), так и естественного происхождения (твердые отходы производства). Причем большее предпочтение отдается использованию отходов производства [1]. Так, минеральные кислоты,

использованные в процессе выщелачивания породы данбурита, являются отходом химического производства.

К настоящему времени выявлено достаточно много эндогенных месторождений бора различных минеральных типов, в том числе и месторождений промышленного значения. Однако по масштабам оруденения и качеству боросодержащего сырья среди эндогенных месторождений, боросиликатные месторождения Ак-Архар (Таджикистан) заслуживают самого серьезного внимания, и является перспективным для переработки.

Эти виды сырья, несмотря на низкое содержание оксида бора (до 10% B_2O_3), содержат в своем составе другие полезные компоненты, и отличаются от других боросодержащих руд химическим, минералогическим составом и кристаллической структурой. Промышленная переработка этих руд является вполне целесообразной, если ее вести комплексным методом.

В работе [2] изучено кислотное разложение и получение борной кислоты разложением индерсных боратовых руд. Показана возможность комплексного использования боратов посредством разложения их смесью азотной и серной кислот. Получены основные данные, необходимые для технико-экономической оценки этого метода и выход товарной борной кислоты.

В настоящей работе рассмотрена возможность применения отходов химического производства (соляной, серной и азотной кислот) для получения борной кислоты из данбуритовой породы Таджикистана.

Методом рентгено-фазового анализа (РФА) установлено, что главными рудообразующими минералами породы данбурита являются: данбурит, датолит, аксинит, гидроборацит, гранат, пироксены (или геденбергит), гидрослюда, монтмориллонит, кальцит и кварц.

Данбуритовая порода была разделена по фракциям (магнитная и немагнитная), а методом микроскопического анализа на соответствующие минералы. Установленный минералогический состав данбуритовой породы следующий: (в мас %): данбурит и датолит - 80, аксинит - 5, железосодержащие минералы (пироксен, гранат) - 3, а остальную часть составляют свободный кварц и пустая порода. Пустая порода представлена гипсом, карбонатами кальция, глинистыми минералами и алюминийсодержащие минералы - 1%, (гидрослюда, монтмориллонит) и кварцем. Результаты рентгенофазового анализа (РФА) исходного и прокаленной руды данбурита при температуре 950-980°С приведены на рис. 1 и 2.

Данные рентгенофазового анализа доказывают наличие выделенных минералов. Выявлено, что при предварительном обжиге происходит ряд изменений в минералогическом и химическом составе данбуритовой породы. Из рентгенограмм данбуритовой породы до и после обжига видно, что руда, не теряя кристаллическую структуру, образует соединение, обладающее большей реакционной способностью. Установлено, что при прокаливании происходит термодеструкция минералов и перестройка кристаллической структуры α-модификаций в более активные β- или γ-формы, которые отличаются хорошей растворимостью.

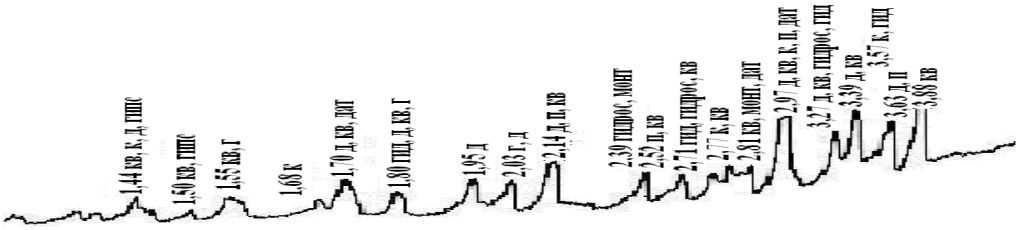


Рис.1. Рентгенограмма исходного данбурита месторождения Ак-Архар: кв – кварц, к – кальцит, г – гранат, д – данбурит, дат - датолит, а - аксинит, п – пироксены, гидрос – гидрослюда, гид – гидроборацит, монт - монтмориллонит.

Выявлено, что в процессе термической обработки до 900°С в составе железосодержащих минералов не происходит значительных изменений, с увеличением температуры до 950°С и выше постепенно превращаются в легко вскрываемую форму.

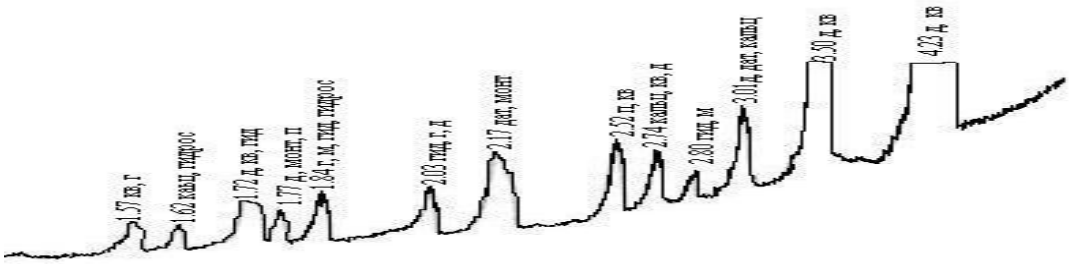


Рис.2. Рентгенограмма данбуритовой породы после предварительного обжига: кв – кварц, к – кальцит, г – гранат, д – данбурит, дат - датолит, п – пироксены, гидрос – гидрослюда, гид – гидроборацит, монт - монтмориллонит.

Превращение пироксена, граната, гидрослюды, монтмориллонита и частично кварца в хорошо растворимую форму наблюдается с увеличением времени термообработки до 980°С. Оксид железа, содержится в составе пироксена и граната, а оксид алюминия - в составе гидрослюды, монтмориллонита и глины, которые являются сопутствующими минералами данбуритовой породы. Как видно из рентгенограмм исходной (рис.1), и термически обработанной породы данбурита (рис. 2), основные пики, относятся к железо-, алюминий-, кальций и боросодержащим минералам.

Исследованиями дифференциально-термического анализа (ДТА) выявлено, что реагирующая способность породы данбурита с минеральными кислотами увеличивается после термической обработки при высоких температурах, что доказано путем прокаливания (рис. 3). Согласно термограмме и данным рентгенофазового анализа до 700ºС порода данбурита не претерпевает никаких изменений, и свидетельствует о том, что порода не содержит химически и механически связанные воды. Выше этой температуры происходят изменения (первый эндотермический эффект), связанные с удалением летучих компонентов, которые полностью заканчиваются при 820ºС с образованием соединений, обладающих большей реакционной способностью.

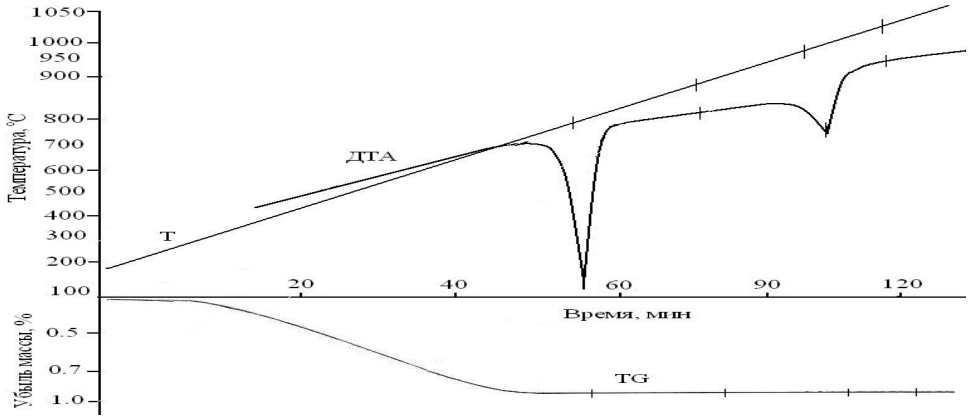


Рис.3. Термограмма данбуритовой породы.

Второй эндотермический эффект при температурах 950-980ºС связан с тем, что порода данбурита разлагается с образованием дибората кальция $CaO \cdot B_2O_3$, силиката кальция $CaO \cdot SiO_2$ и кварца β- или γ-SiO_2 модификации. Одновременно с разложением породы образуется жидкая фаза, а при 1040-1050ºС полностью расплавляется. Результаты показали, что наиболее рациональными условиями термической обработки являются: температура - 950-980ºС, продолжительность прокаливания – 60 мин. При

этих условиях степень последующего кислотного разложения данбуритовой породы составляет не менее 80%.

Так как исследуемые минералы не имеют хорошо выраженную проекцию в плоскости, то плоскости разрыва будут располагаться по различным, не имеющим строгой ориентации направлениям. Разрыв по более слабым связям CaO, будет сопровождаться разрывом по более прочным связям. В результате этого при измельчении минерала на поверхности минерала обнажаются частично группа CaO и SiO_2, которые, при взаимодействии с кислотами дают частично гель кремниевую кислоту (H_2SiO_3) и соли кальция.

А первичной причиной образования отрицательного заряда на поверхности силикатов бора является обнажение кремнекислородных ионов с некомпенсированными валентными связями и обнажении катионов кальция, которые при взаимодействии с минеральными кислотами выщелачиваются. Строение обнажения катиона кальция и силикатных групп при расколе частиц (зерен) данбурита при высоких температурах можно представить следующим образом (рис.4).

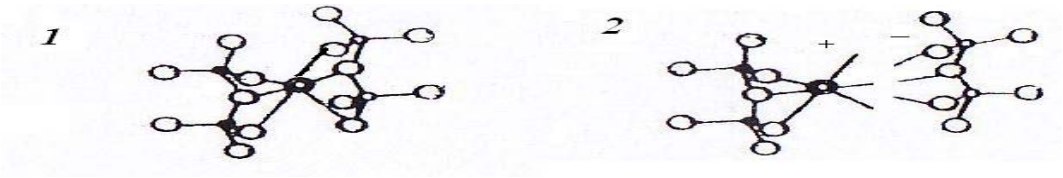


Рис.4. Разрыв связей и разрушение кристалла данбурита при воздействии температуры: 1-проекция целой частицы (зерна) данбурита; 2-разрыв связей минерала данбурита при высоких температурах.

Способы выщелачивания минерального сырья растворами азотной кислоты на практике начали применять позже, чем сернокислотные и солянокислотные способы, поэтому они меньше описаны в литературе, а данные по исследованию процесса выщелачивания данбуритовой породы этими кислотами практически отсутствуют. Преимущество кислотных способов переработки заключается в том, что минеральные кислоты практически не взаимодействуют с кремнеземом, составляющий значительную часть минеральной породы. Если соляная кислота не реагирует с кремнеземом, преимуществом серной кислоты, в свою очередь, является образование малорастворимых сульфатов, азотная кислота образует хорошо растворимые соли, применяемые в сельскохозяйственной отрасли и борная кислота, используемая в различных отраслях отечественной и зарубежной промышленности.

На химических и производственных предприятиях Таджикистана попутно получаются соляная и серная кислоты. Отработанная серная и соляная кислоты низкой концентрацией в дальнейшем не находят своего применения, их нейтрализуют известняком и выбрасывают в шламонакопители.

Использование отработанных кислот в технологическом процессе переработки данбуритовой породы кислотными способами перспективно как с экономической, так и экологической стороны.

Исследовано взаимодействие данбуритовой породы с минеральными кислотами (соляной, серной и азотной) и установлено влияние различных параметров на извлечение оксида бора и др. компонентов.

Таблица 1

Химический состав исходного данбурита месторождения Ак-Архар

	Компоненты												
Содер-жание, мас%	B_2O_3	SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	CaO	MgO	TiO_2	MnO	K_2O	Na_2O	P_2O_5	Ппп
	8,4-10,4	59,8	1,27	2,2	1,39	19,6	0,75	0,15	0,29	0,1	0,03	0,11	3,91

Серную, соляную и азотную кислоты для разложения данбуритовой породы дозировали из расчета образования сульфатов, хлоридов и нитратов кальция, алюминия, железа и борной кислоты. Химический состав приведен в табл. 1.

Пробу данбурита измельчали, и разложение проводили в термостатированном реакторе с мешалкой. Пульпу фильтровали и промывали водой. В растворе определяли содержание алюминия, железа, кальция и бора и др. оксидов по методике [3].

Результаты исследования разложения данбуритовой породы без предварительного обжига показали, что степень извлечения оксида бора B_2O_3 не превышает 44,8%, размер частиц в реакционной смеси при этом не должен превышать 0,1÷0,3 мм. Выявлено, что руда, измельченная больше 0,1 мм. плохо вскрывается, особенно ее железосодержащая часть.

Согласно данным опытов и результатам анализов можно констатировать, что при термической обработке минералы данбуритовой породы существенно активизируются.

Исследования показали, что увеличение реакционной способности данбуритовой породы с соляной, серной и азотной кислотами после термической обработки связано с разложением данбурита:

$$CaO \cdot B_2O_3 \cdot 2SiO_2 \rightarrow CaO \cdot B_2O_3 + 2SiO_2.$$

Установлена, также, зависимость степени извлечения оксида бора от температуры, продолжительности процесса, концентрации кислоты и размера частиц данбуритовой породы. Как показали результаты анализа, степень извлечения оксида бора после обжига достигает максимального значения, составляя в среднем 72,9%. Установлено оптимальное дозирование минеральных кислот: соляная - 100%, серная - 80-100% и азотная - 140-150% от стехиометрического количества.

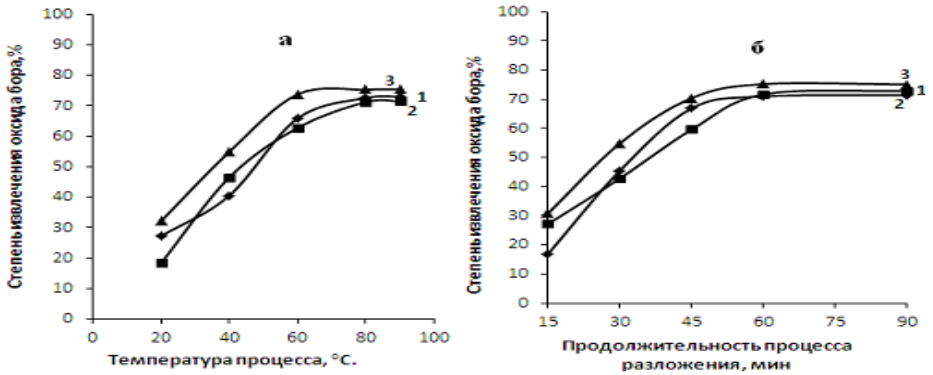


Рис.4. Зависимость степени извлечения оксида бора B_2O_3 из предварительно обожженной породы данбурита от температуры (а) и продолжительности процесса (б) (размер частиц < 0,1 мм; температура – 95°С; продолжительность процесса – 60 мин; $\tilde{N}_{HCl}$ – 25 мас%, $\tilde{N}_{H_2SO_4}$ – 50 мас% и C_{HNO_3} – 20 мас%). 1 - для сернокислотного; 2 - для солянокислотного и 3 - для азонокислотного разложения данбурита.

Изучено влияние температуры на ход реакции выщелачивания от 20 до 90ºС (рис. 4а.). Руду обрабатывали 25%-ной соляной, 50%-ной серной и 20%-ной азотной кислотами в течение 1 ч. С ростом температуры от 20 до 100ºС степень извлечения оксида бора в раствор возрастает, составляя (в%): для HCl - 70,6, для H_2SO_4 - 71,4 и для HNO_3 - 79,6.

Изучение зависимости степени извлечения оксида бора из предварительно обожженной породы данбурита от продолжительности процесса (рис. 4б.) при разложении минеральными кислотами до 100ºС показало, что при продолжительности процесса 60 мин. степень извлечения оксида бора увеличивается достигая максимального значения (в %): для HCl - 70,1, для H_2SO_4-72,7 и для HNO_3 - 76,7.

Результаты исследования влияния дозирования минеральных кислот при разложении показали, что увеличение дозировки кислоты существенно изменяет степень вскрытия данбуритовой породы (рис. 5). Выявлено, что оптимальной концентрацией минеральных кислот, вводимой в реакционную массу, является 25% - ная соляная (100% от стехиометрии), 45% - ная серная (80-100% от стехиометрии) и 20% - ная азотная кислоты (140-150% от стехиометрии), при этом степень извлечения оксида бора составляет (в%): для HCl - 70,9, для H_2SO_4 - 72,8 и для HNO_3 - 76,2 соответственно (рис. 5а).

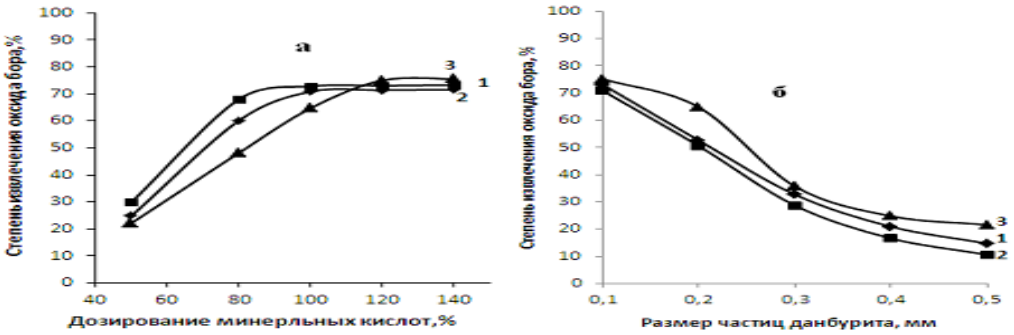


Рис.5. Зависимость степени извлечения оксида бора B_2O_3 из предварительно обожженной породы данбурита от дозирования минеральных кислот (а) и размера частиц породы (б) (температура – 90°С; продолжительность процесса – 60 мин; $\tilde{N}_{HCl}$ – 25 мас%, $\tilde{N}_{H_2SO_4}$ – 50 мас% и C_{HNO_3} – 20 мас%); 1 - для сернокислотного, 2 - для солянокислотного и 3 - для азонокислотного разложения данбурита.

Изучена также зависимость степени извлечения оксида бора от размера частиц (рис. 5б). Установлено, что чем меньше размер частиц, тем выше степень извлечения оксида бора, что в свою очередь связано с увеличением поверхности соприкосновения фаз частиц данбурита с минеральными кислотами и скорости диффузионного переноса ионов водорода кислоты к неразложившимся частицам породы.

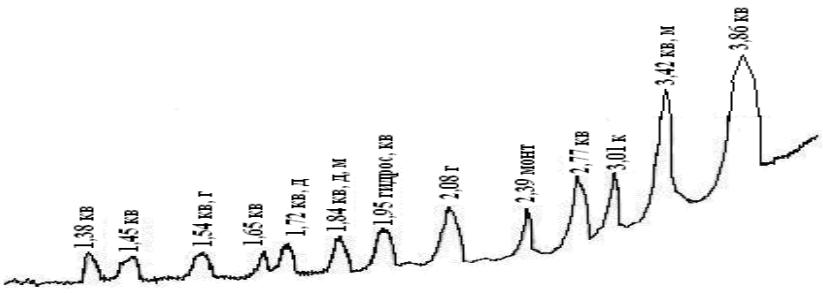


Рис.6. Рентгенограмма остатка исходного данбурита после кислотной обработки: кв – кварц, кальц. – кальцит, г – гранат, д – данбурит, гидрос – гидрослюда, монт - монтмориллонит, м - муллит.

Из рентгенограммы остатка данбуритовой породы после разложения минеральными кислотами видно, что интенсивность пиков, относящихся к минералам данбуриту, гранату, гидрослюде и монтмориллониту, уменьшается (рис. 6), а пики, относящиеся к минералам датолиту, аксиниту, пироксену и гидроборациту, вообще исчезают, и появляются новые пики, относящиеся к искусственному минералу муллиту.

Исходя, из высокой степени извлечения оксида бора при азотнокислотном разложений изучена кинетика процесса.

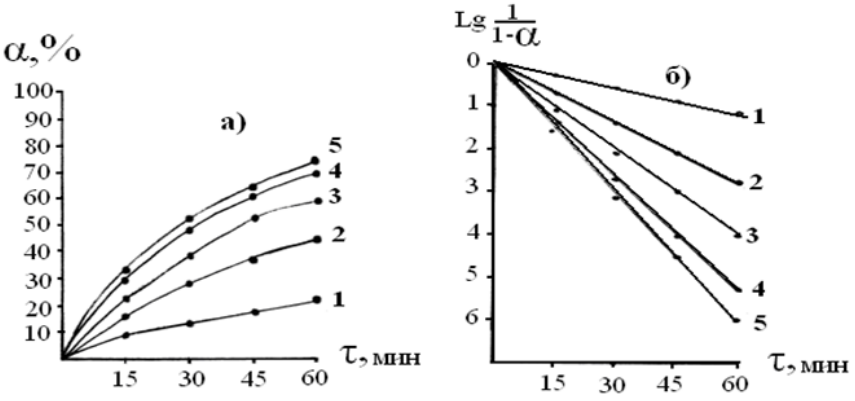


Рис.7. Кинетические кривые извлечения оксида бора от времени (а) и зависимость lg $\frac{1}{1-\alpha}$ от времени (б) для процесса разложения данбуритовой породы азотной кислотной: 1 - при 20°С; 2 - 40°С; 3- 60°С; 4 - 80°С и 5 - 95°С, соответственно.

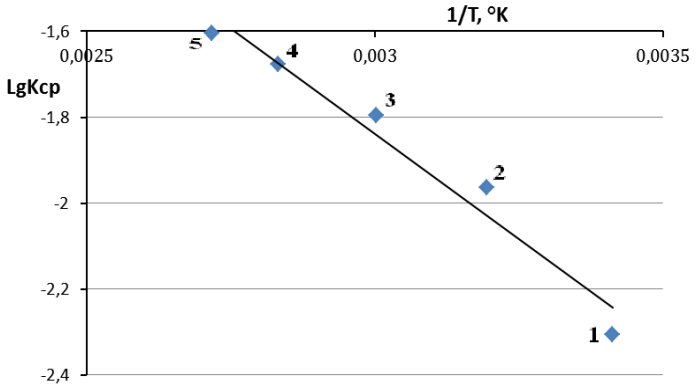


Рис. 8. Зависимость LgKcp - 1/T для процесса разложения данбуритовой породы азотной кислотой: 1- при 20°С; 2 - 40°С; 3 - 60°С; 4 - 80°С и 5 - 95.

Изменение константы скорости разложения обожженного данбурита азотной кислотой от температуры процесса подчиняется закону Аррениуса, что подтверждается прямолинейной зависимостью lgK от 1/T (рис. 8).

Рассчитаны значения энергии активации азотнокислотного разложения данбуритовой породы**.** Даная зависимость подчиняется корреляционному уравнению LgKcp=-980,04·(1/T)+1,1018 при значении коэффициента корреляции R^2=0,9603**.** Численное значение энергии активации равно 21,19 кДж/моль.

Центральным вопросом при переработке данбуритовой породы является выделение с достаточно высоким выходом борной кислоты из раствора, полученного при разложении и содержания солей хлоридов, сульфатов и нитратов. По условиям совместной растворимости борной кислоты и хлоридов, сульфатов и нитратов алюминия, железа и кальция кристаллизация борной кислоты при охлаждении раствора может происходить лишь до эвтонической точки, т.е. точки взаимного насыщения раствора обоими компонентами, после которой начинается выделение из раствора солей, наряду с борной кислотой, и, следовательно, загрязнение последней, когда кристаллизацию вели в условиях, исключающих выпадение солей железа, алюминия и кальция.

На основе проведенных исследований разработана и представлена принципиальная технологическая схема получения борной кислоты из данбуритовой породы кислотными способами.

Предлагается предварительный обжиг до начала разложения минеральными кислотами. После термической обработки данбуритовая порода измельчается до

определенного размера частиц и выщелачивается 25%-ной соляной, 45%-ной серной и 20%-ной азотной кислотами.

Из раствора методом перекристаллизации выкристаллизовывается борная кислота, которая фильтруется и высушивается. Предлагается также отделение солей хлоридов, сульфатов и нитратов металлов. Твердый остаток представляет собой оксида кремния, сульфата кальция и не разложившейся части данбуритовой породы, которые можно использовать как сырье для производства стекла.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Маматов Э.Д. и др. Переработка алюминийсодержащего сырья и применение отходов производства // 2-Межд. конф. – Киев, 2015. - С. 53-63.
2. Поляк А.М., Пинаевская Е.Н., Ромов Г.Б., Козлова Н.И., Девятовская Л.И. Получение борной кислоты разложением индерсных боратовых руд смесью азотной и серной кислот / Труды конференции по химии бора и его соединений. – М.: ГХИ, 1950. – С. 135.
3. Алимарин М.П., Ромм М.И. Методика определения бора в силикатных минералах и борных породах. – М.-Л.: Гостехиздат, 1932. - 48 с.
4. Эммануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. – М.: Высшая школа, 1974. - 400 с.

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ ДАНБУРИТОВОЙ РУДЫ МЕСТОРОЖДЕНИЯ АК-АРХАР

Приведены результаты физико-химического исследования, химического анализа данбуритовой руды. Изучена кинетика и определен механизм процесса получения борной кислоты при выщелачивании породы данбурита кислотными методами. Установлен минералогический состав и влияние режима переработки на выход борной кислоты.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: разложение, выщелачивание, данбуритовая руда, борная кислота.

PHISICAL AND CHEMICAL BASES OF DANBURITE ORE LEACHING IN AK-ARKHAR DEPOSIT

The article gives the results of the research of physical-chemical, chemical analyses of the danburite ore. Studied the kinetics and defined mechanism of process obtaining boric acid during leaching breeds by acid methods. There installed of the mineralogical composition and influence of conditions process in the yield boric acid.

KEY WORDS: decomposition, leaching, danburite ores, boric acid.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Маматов Эргаш Джумаевич, кандидат технических наук, заведующий лабораторией энергоемких веществ Института химии имени В.И. Никитина АН РТ. Тел.: (+992) 919-15-97-17; e-mail: ergash76@mail.ru

Сулаймони Машоллох Азизулло, аспирант Института химии имени В.И. Никитина АН РТ.

Рахматуллоева Мадина Шокирджоновна, аспирант Института химии имени В.И. Никитина АН РТ.

Расулов Уктам Зоирович, кандидат химических наук, ст. преподаватель кафедры общей химии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 919-21-46-35.

Хидиров Муродали Саидович, кандидат технических наук, ст. преподаватель, заведующий кафедрой общей химии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 918-86-37-36.

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ХЛОРИРОВАНИЕ ДАНБУРИТА

Ятимов П.М.

Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

В конце 50-х годов XX века в Институте химии имени В.И. Никитина АН Таджикской ССР со стороны Г.А. Бехтле был разработан метод низкотемпературного хлорирования [1-2]. В дальнейшем метод низкотемпературного хлорирования был

усовершенствован в работах И.А. Глухова и сотр. [3-13]. Были разработаны научные основы технологии низкотемпературного хлорирования редкоме-талльных руд.

Исследуя различные обменные реакции между хлоридами, оксидами и оксохлоридами титана, молибдена, вольфрама, ниобия, тантала, рения и других элементов, было получено множество новых, практически неизученных соединений этих металлов, разработаны и усовершенствованы методы направленного синтеза их хлоридных соединений, исследованы превращения указанных соединений и их природа, а также их способности к образованию комплексов [3-13].

Процесс низкотемпературного хлорирования природных борсодержащих руд изучали на исходном сырье – данбуритах месторождения Ак-Архар [14].

На рисунке 1 представлена схема установки для исследования процесса низкотемпературного хлорирования оксидов из состава исходного данбурита. Из баллона (1) через осушительные склянки (2, 3) подавался газообразный хлор. Подача хлора регулировалась реометром (4), предварительно отградуированным по сухому хлору. Затем через барботёр (5) с насыщенными хлоридами серы проходил газообразный хлор. Далее насыщали порошкообразную серу газообразным хлором для получения хлоридов серы. Полученную жидкую смесь хлоридов серы помещали в барботёр, который затем устанавливали в термостат для дополнительного насыщения хлором. Взвешивание барботёра с хлористой серой проводилось через каждый час. Вес барботёра с хлором увеличивался по мере насыщения хлором. Эту операцию проводили во временном промежутке до тех пор, пока не достигалось равновесие. Затем барботёр с хлористой серой устанавливали в электрическую баню (6) и присоединяли вплотную к входной части стеклянного реактора (7), длина которого составляла около 60 см.

Навеска исходного данбурита и данбуритового концентрата помещалась между двумя асбестовыми прокладками в реактор. Реактор (7) помещался в электрическую печь сопротивления (8). Термометром (9) измерялась температура в зоне реакции и в печи, электрическая нагрузка регулировалась с помощью автотрансформатора.

Хлориды серы в виде газообразной смеси поступали в нижнюю часть реактора (7), далее проходили через навеску данбурита и вступали в реакцию с оксидами, входящими в состав данбурита. На выходе реактора в холодной его части конденсировались продукты возгона. После проведения реакции отходящие газы улавливались в поглотителях (12) с 10% раствором щелочи.

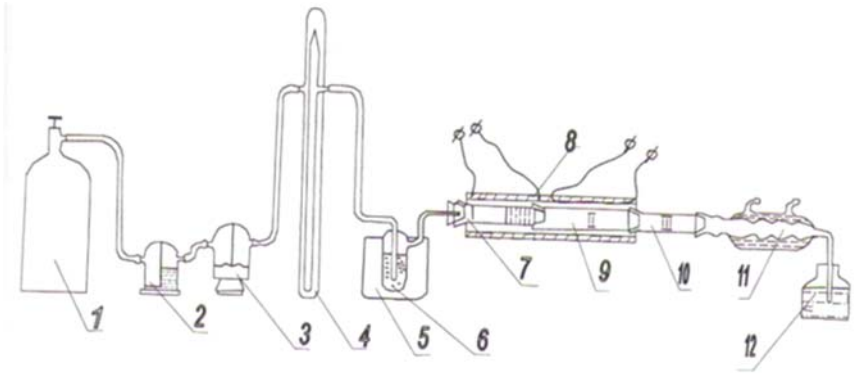


Рис. 1. Схема установки для изучения низкотемпературного хлорирования данбуритов месторождения Ак-Архар: 1 – баллон с хлором; 2 – склянка Тищенко для жидких поглотителей (концентрированная H_2SO_4); 3 – склянка Тищенко для твердых поглотителей; 4 – реометр; 5 – электрическая баня; 6 – барботёр с хлористой серой; 7 – реактор; 8 – электрическая печь; 9 – термопара; 10 – двухсекционная печь; 11 – холодильник; 12 – поглотитель с 10% раствором щелочи ($NaOH$).

На установке (рис. 1) был проведен процесс хлорирования исходного данбурита,

где смесь хлоридов серы с газообразным хлором являлась хлорирующим агентом.

Для выявления оптимальных параметров проведения процесса хлорирования данбурита были исследованы зависимости степени хлорирования оксидов, входящих в состав данбурита от температуры процесса хлорирования и от продолжительности процесса. Результаты исследования представлены на рисунке 2.

Влияние температуры. Влияние температуры на хлорирование данбурита изучали в интервале от 50 до 350ºС при длительности процесса хлорирования 60 минут.

Максимальное извлечение оксидов достигается при повышении температуры до 250-300°С и составляет, в %: Fe_2O_3 – 38,9; B_2O_3 – 18,7; Al_2O_3 - 21,7 и CaO – 11,29. При повышении температуры процесса выше 300°С степень извлечения оксидов из состава данбурита остается неизменной (рисунок 2а).

Продолжительность процесса. Результаты влияния продолжительности процесса на хлорирование оксидов (Fe_2O_3, B_2O_3, Al_2O_3 и CaO), входящих в состав данбурита, приведены на рисунке 2б. Интервал времени менялся от 30 до 120 мин. Постоянными параметрами были: размер частиц – 0,1 мм., температура - 250-300°С. Как показывают результаты опытов, через 20 мин. после начала хлорирования степень извлечения оксидов Fe_2O_3, B_2O_3, Al_2O_3 и CaO составляет (в %): 39,05; 19,36; 21,4 и 10,02 соответственно.

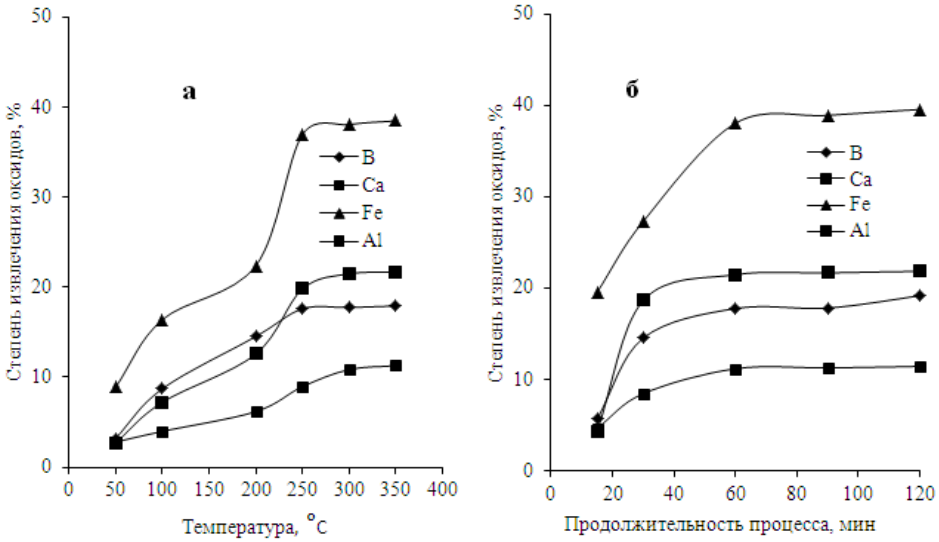


Рис. 2. Зависимость степени хлорирования оксидов (Fe_2O_3, B_2O_3, Al_2O_3 и CaO), входящих в состав данбурита, от температуры (а) и продолжительности процесса (б) при низкотемпературном хлорировании.

Таким образом, в результате проведенных исследований для хлорирования данбурита можно рекомендовать следующее условия: продолжительность процесса хлорирования – 60 мин, размер частиц – 0,1 мм при температуре хлорирования – 250-300°С [14].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бехтле, Г.А. Хлорирование вольфрамата кальция и вольфрамата железа смесью хлора и хлоридов серы / Г.А. Бехтле: Труды АН Тадж. ССР. Институт химии. – Сталинабад, 1958. -Т. 34. - Вып.2. - С. 3-10.
2. Бехтле, Г.А. Влияние состава газовой фазы на процесс хлорирования вольфрамата кальция хлором, насыщенным парами хлоридов серы / Г.А. Бехтле: Труды АН Тадж. ССР. Институт химии. – Сталинабад, 1958. - Т. 34. - Вып. 2. - С. 11-14.
3. Глухов, И.А. Исследование оптимальных условий хлорирования пятиокисей ниобия и тантала / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина, А. Шарипов // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. – Душанбе, 1973. - Т. 50. - №4. - С. 48-51.

4. Шарипов, А.Ш. Планирование эксперимента при хлорировании лопаритового и пирохлорового концентрата / А.Ш. Шарипов, И.А. Глухов, Л.М. Шалухина // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. – Душанбе, 1975. - №1(55). - С. 72-78.
5. Глухов, И.А. К кинетике низкотемпературного хлорирования пятиокисей ниобия и тантала / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина, А. Шарипов // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. – Душанбе, 1976. - №4(62). - С. 95-100.
6. Глухов, И.А. О кинетике восстановительного хлорирования молибдата свинца, молибдата кальция и трехокиси молибдена / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина // Докл. АН Тадж. ССР. - 1969. - Т.10. - №3. - С. 37-39.
7. Глухов, И.А. Кинетика хлорирования двуокиси титана и рутила / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина // Докл. АН Тадж. ССР. - 1969. - Т. 12. - №5. - С. 26-28.
8. Глухов, И.А. О реакции восстановительного хлорирования молибдата свинца и трехокиси молибдена / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина // Докл. АН Тадж. ССР, 1961. - Т.4. - №4. - С. 19-24.
9. Глухов, И.А. Восстановительное хлорирование пятиокиси ванадия / И.А. Глухов, А. Турсунов // Докл. АН Тадж. ССР, 1967. - Т. 10. - №4. - С. 32-35.
10. Глухов, И.А. Восстановительное хлорирование вольфрамата кальция / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина // Докл. АН Тадж. ССР, 1960. - Т. 3. - №1. - С. 23-25.
11. Глухов, И.А. Термовесовое изучение реакции восстановительного хлорирования вольфрамата и молибдата кальция / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина, В.Я. Заграничная // Докл. АН Тадж. ССР, 1968. - Т. 11. - №1. - С. 34-35.
12. Глухов, И.А. К вопросу о механизме хлорирования молибдатов и вольфраматов / И.А. Глухов, Л.М. Шалухина // Докл. АН Тадж. ССР, 1963. - Т. 6. - №1. - С. 3-7.
13. Шалухина, Л.М. К вопросу хлорирования диоксида титана / Л.М. Шалухина, Р.М. Давыдовская, Э.А. Емельянова // Изв. АН Тадж. ССР. Отд.физ.-мат. и геол.-хим. наук, 1962. - №2(32). - С. 44-51.
14. Маматов, Э.Д. Хлорирование данбурита месторождения Ак-Архар Таджикистана в присутствии смеси газообразного хлора и хлоридов серы / Э.Д. Маматов, П.М. Ятимов, У.М. Мирсаидов: сб.: «Материалы семинаров: «2011 год – Международный год химии» и «Радиационная безопасность Таджикистана». – Душанбе, 2011. - С. 62-67.

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ХЛОРИРОВАНИЕ ДАНБУРИТА

В статье представлен процесс низкотемпературного хлорирования природных боросодержащих руд, в частности схема установок исследования процесса из состава исходного данбурита, доказаны зависимость степени хлорирования оксидов, входящих в состав данбурита, от температуры и продолжительности процесса при низкотемпературном хлорировании.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: низкотемпературное хлорирование, данбурит, боросодержащие руды, склянка, реометр, барбатер, термостат, реактор, температура, продолжительность процесса, извлечение оксидов.

LOW-TEMPERATURE CHLORINATION OF DANBURITE

The article presents the process of low-temperature chlorination of natural boron ore in particular, the scheme setting of the research process, from raw danburite, proved the dependence of the degree of chlorination of oxides contained in the composition of danburite, the temperature and duration of the process by low temperature chlorination.

KEY WORDS: low-temperature chlorination, danburite, boron ore, flask, rheometer, barbati, thermostat, reactor, temperature, duration of process, the extraction of oxides.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ: Ятимов Парвиз Махмадаминович, кандидат химических наук, ст. преподаватель кафедры общей химии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 985-34-24-08; e-mail: parviz@mail.ru

ЭКОЛОГО-ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ *SALSOLA RIHTERI (MOG.) KAR. EX LITV.* В УСЛОВИЯХ ЗАПОВЕДНИКА «ТИГРОВАЯ БАЛКА»

Бердыев Д., Б., Комилов Р., Рустамов Ш.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

Растения заповедника «Тигровая балка» в Таджикистане характеризуется высокой питательной ценностью, их кормовая продуктивность высока, поэтому местное население широко использует их как корм для животных и в качестве топлива. Галофиты адаптировались к недостатку почвенной и атмосферной засухи в процессе эволюции, приспособились к сохранению высокой жизнеспособности [4].

Анализ данных многолетних эколого-физиологических исследований дает возможность установить наиболее оптимальные условия для роста, развития и других физиологических процессов отдельных видов и целых растительных сообществ, определить степень стойкости и пластичности видов. В настоящее время такого рода исследования в природных условиях практически не проводиться.

Наши полевые исследования проведены главным образом в пустынной зоне заповедника «Тигровая балка» в течение двух вегетационных сезонов – 2012 -2013 гг., территория которого значительно сокращается в результате деятельности человека. В связи с этим пристальное внимание следует уделить всестороннему изучению среды и обитателей заповедника, и на научной основе доказать необходимость его сохранения хотя бы в ныне существующих границах.

Главная цель работы – раскрыть основные стороны механизма адаптации солянки Рихтера к экстремальным условиям существования, где лимитирующим фактором является недостаток почвенной и атмосферной влаги наряду с которым играют отрицательную роль высокие температуры воздуха и засоление почв.

Salsola rihteri – галофит является доминирующим видом фитоценоза заповедника «Тигровая балка», произрастает в различных экотопах отличающихся по почвенно-гидрологическим условиям и растительному покрову [7]. Древовидная солянка 1,5-2 м высоты: продолжительность ее жизни 10-12 лет [8, 10, 12]. Этот кустарник имеет тонкие нитевидные листья мезоморфного характера, длиной 5-7 см, расположенные на побегах в мутовках, от 3 до 8 шт в каждой. Корневая система промежуточного типа [9], ей свойственно мощное развитие корней, распространяющихся горизонтально в поверхностном слое песка. Главный же корень может углубляться на 2,5-2,8 м., с грунтовыми водами S. rihteri не связана и получает влагу из 3-метрового слоя песка.

Проведенные наблюдения показали, что период развития S. rihteri в пустынной зоне заповедника «Тигровая балка» обычно длится с конца марта до конца октября. Только во второй половине июня растение вступает в фазу цветения, которая продолжается 15-20 дней. С первых чисел июля и до начала сентября, т.е. на протяжении 2 месяцев, идет формирование плодов, а в середине сентября начинается осеменение. Для проведения анализа эколого-физиологического плана были выбраны экземпляры S. rihteri приблизительно в возрасте 6-8 лет: тип побегов, на которых сделаны все определения, - вегетативный.

Метеорологические данные в районе стационара «Тигровая балка» в годы наблюдений освещено в [3].

Транспирация имеет исключительное значение в жизни растений, т.е. расход воды в значительной мере определяет их водный баланс. Поэтому изучение интенсивности транспирации одного из главных показателей водного режима растений, в котором как в фокусе отражается влияние внешних условий и физиологических

особенностей видов, приобретает большое значение при анализе адаптационных особенностей растений [1].

Интенсивность транспирации определялась нами методом быстрого взвешивания на торсионных весах [6]. Повторность опыта трехкратная.

Статическую обработку экспериментальных данных проводили по Б.А. Доспехову [5].

Анализ данных имеющихся в нашем распоряжении, иллюстрирующих динамику наибольших и наименьших значений интенсивности транспирации в разные месяцы на протяжении сезона вегетации листьев S. rihteri показывают, что самая высокая потеря воды 1,70-2/2 г/ч. регистрируется в конце июня. По мере нарастания напряженности климатических факторов и иссушения поверхностной толщи почвогрунтов, происходит снижение расхода воды. Наименьшая величина (0,20-0,24) была найдена в начале вегетации (табл. 1).

Таблица №1.

Интенсивность транспирации Salsola rihteri в разные месяцы в г/г сырого веса/ч.

Год	Месяцы наблюдений							
	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь
2012	0,70 / 0,20	0,90 / 0,60	1,14 / 0,58	1,50 / 0,80	1,30 / 0,70	1,20 / 0,50	0,82 / 0,48	0,92 / 0,50
2013	0,68 / 0,24	1,10 / 0,60	1,26 / 0,62	1,60 / 0,80	1,32 / 0,70	1,20 / 0,58	1,10 / 0,50	0,86 / 0,58

Примечание: в числителе – наибольшая, в знаменателе – наименьшая величина.

Проведенные исследования показали, что в ходе вегетации среднедневная величина скорости отдачи воды у S. rihteri заметно изменяется.

Таблица №2.

Динамика средних значений интенсивности транспирации листьев Salsola rihteri в течение сезона вегетации в г/г сырого веса/ч.

Год	Месяцы наблюдений							
	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь
2012	0,40	0,50	0,70	0,90	0,88	0,70	0,72	0,78
2013	0,44	0,52	0,60	0,88	0,81	0,60	0,62	0,74

Сезонная динамика потеря воды листьев S. rihteri складывается следующим образом. До мая она сравнительно невелика. Особенно высокая скорость транспирации наблюдается в июне и июлье. В августе за счет уменьшения испаряющей поверхности, изменения морфологии листа и недостатка почвенной и атмосферной влаги скорость транспирации снижается, осенью происходит некоторое возрастание скорости отдачи воды (табл. 2). Данные полученные нами, позволяют считать, что интенсивность транспирации листьев S. rihteri в пустынной зоне заповедника «Тигровая балка» достаточно обычно для растений засушливых областей, наиболее близкой по величине к псаммофитам других территорий.

Осмотическое давление служит показателем гидратуры протоплазмы растений и тем самым состояния его тургесуентности: повышение осмотического давления и соответственно снижение гидратуры является первым подающимся точному определению физиологически важным следствием нарушения водного режима II.

Действительно, сведения о том, какие виды в какой степени реагируют на недостаток влаги путем возрастания осмотического давления позволяет судить о нарушении водного баланса. Еще Валтер Г.Д. [14] писал о том, что степень физиологически доступной воды определяется прежде всего осмотическим давлением клеточного сока и водоудерживающей способностью коллоидов плазмы. Осмотическое давление растений как и сосущая сила, особенно четко реагирует на недостаток воды в почвах, в значительной степени уровень этого показателя водного режима зависит от воздействия экстремальных температур.

Осмотическое давление показывающие концентрацию клеточного сока, определялось с помощью криоскопического метода. Сосущая сила измерялась нами с помощью метода, предложенного Шардаковым [13].

Для характеристики осмотического давления листьев S. rihteri привлечены данные измерений, полученные в 2012 и 2013 гг., существенно различавшихся по погодным условиям. Весна 2012 г., была сухой и сравнительно теплой. Весна 2013 г. характеризовалась обилием дождливых дней и невысоких температур в воздухе.

Сопоставление и анализ данных показали, что у S. rihteri не были обнаружены осмотические давления, повышающее 68 атм. В целом его изменения у S. rihteri происходит в следующих границах: минимальные не опускались ниже 26 атм; максимальные не переходили за границу 68 атм (табл. 3).

Таблица №3.

Осмотическое давление листьев Salsola rihteri (в атм)

Год	Дата	Март	Дата	Апрель	Дата	Май	Дата	Июнь	Дата	Июль	Дата	Август	Дата	Сентяб
2012	26	34/28	10	48/34	30	58/44	28	60/54	30	64/50	25	68/57	30	64/54
2013	28	30/26	24	40/32	28	56/40	24	58/50	24	60/52	20	66/50	28	60/52

Степень напряженности водообмена растений, на протяжении длительного срока подвергавшихся засухе в большой мере проявляется в максимальных величинах осмотического давления.

Что касается нижней границы осмотического давления выяснилось, что концентрация клеточного сока у S. rihteri даже после выпадения осадков не опускалось ниже 26-28 атм. (табл 3).

Если рассмотреть степень зависимости осмотического давления от погодных условий, избрав в качестве критерия лишь максимальные значения, то следует отметить, что у S. rihteri она стабильно достигает в разные годы, почти одних и тех же величин. В целом реакция S. rihteri показала, что граница, в которой происходит сезонные изменения осмотического давления по годам, даже отличающимися гидротермическими условиями, меняется слабо.

Таблица №4.

Динамика средних значений осмотического давления листьев Salsola rihteri (в атм)

Год	Месяцы наблюдений						
	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь
2012	30	36	40	48	56	58	54
2013	28	35	34	44	46	56	54

Что касается средней за месяц величины осмотического давления, как видно из данных табл. 4., возрастает в течение сезона вегетации (от наименьшей величины весной до наибольшей в самые засушливые месяцы). В сентябре наблюдается некоторое снижение концентрация клеточного сока.

Поступление воды в растения обеспечивается силами всасывания их корневой системы и листьев. Сосущая сила растений свидетельствует об уровне обеспеченности их водой и поступление водных растворов в ткани растений (табл. 3).

Определение сосущей силы листьев S. rihteri показало, что максимальная сосущая сила не превышала у него 54 атм., ниже 18 атм. она не опускалась (табл. 5).

Таблица №5.

Сосущая сила листьев Salsola rihteri (в атм)

Год	Месяцы наблюдений						
	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь
2012	24/20	30/22	42/30	48/34	50/40	54/42	50/40
2013	22/18	28/20	38/28	44/30	46/34	52/36	50/38

Примечание: в числителе – наибольшая: в знаменателе – наименьшая величина.

Установлено, что в ходе сезонного развития диапазон изменчивости сосущей силы у солянки Рихтера оказался шире 36 атм. Крайне высокие значения этого физиологического показателя в августе (54 атм) и наименьшие (18 атм) в марте.

Сравнение сосущей силы и осмотического давления в достаточной степени приближенно, оценить состояние тургесуентности клеток листьев у S. rihteri – считается, что если величина концентрации клеточного сока больше значения сосущей силы, то клетка находится в тургесцентном состоянии. Превышение сосущей силы над осмотическим давлением свидетельствует о том, что тургор клетки падает, и по мере увеличения этого разрыва активность работы клетки снижается.

Судя по приведенным выше данным, сосущая сила листьев S. rihteri в течение сезона вегетации, не превышает осмотическое давление, но её значение в летне – осенний период велики. Обобщая сказанное о соотношение сосущей силы и осмотического давления, необходимо отметить, что клетки листьев S. rihteri испытывают недонасыщение водой редько: на протяжении почти всего периода вегетации осмотическое давление было выше сосущей силы.

В целом у S. rihteri характерно высокая степень устойчивости к недостаточному и нерегулярному водоснабжению. Эта устойчивость обеспечивается у S. rihteri своим сочетанием реакций на засуху различных показателей водообмена.

ВЫВОДЫ

Изложенные материалы, полученные на протяжении двух сезонов вегетации при разных погодных ситуациях позволили судить о степени адаптации S. rihteri к пустынным условиям существования. Эти наиболее важные эколого-физиологические свойства в обобщенном виде сводится к следующему:

1. В ходе развития у S. rihteri происходит возрастание интенсивности транспирации, которая достигает максимума в конце июня. В самое напряженное время вегетации путем уменьшения испаряющей поверхности, изменении морфологии листа, частичного опадания листьев происходит снижение интенсивности транспирации.

2. В продолжение вегетационного периода осмотическое давление и сосущая сила листьев S. rihteri возрастает. Напряженность гидратуры растений, т.е. наибольшая величина осмотического давления и сосущей силы связано с возрастанием почвенной и

атмосферной засухи. Судя по диапазонам величин осмотического давления и сосущей силы, регулирование водного баланса у S. rihteri протекает наиболее активно.

3. Приведенные выше выводы свидетельствуют о том, что активность регулирования водного баланса с нарастанием засухи обуславливается главным образом возрастанием величин осмотического давления и сосущей силы, снижением интенсивности транспирации листьев S. rihteri в период самой напряженности экологической ситуации.

4. Результаты исследований в значительной мере дополняют, уже имеющейся в литературе научные сведения о защитно – приспособительных реакциях растений жарких пустынь. На практике они могут быть использованы при фитомелиорации пустынных пастбищ, разработке научных программ и решение ряда вопросов по сохранению и рациональному использованию природных ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алексеенко Л.Н. Водный режим луговых растений в связи с условиям среды. - Л., 1976. – 197 С.
2. Бердыев Д. Эколого – биологические особенности и водный режим барханных растений каракумов. Автореф. дис… канд. биол. наук – Самарканд, 1979. – 24 С.
3. Бердыев Д., Давлятова Д.М., Рустамов Ш. Об осмотическом давлении клеточного сока Haloxylon ammodendron (C.A.Mey) Bunge в пустынной зоне заповедника «Тигровая балка» // Вестник Курган-Тюбинского государственного университета имени Носира Хусрав (научный журнал). – Курган-Тюбе: Матбаа, 2015. – № 4 (34). – С. 14-17.
4. Давлятова Д.М., Ниязмухамедова М.Б., Бердыев Д., Рахимов М.М. Содержание растворимых углеводов в растениях заповедника «Тигровая балка» // Докл. АН Респ. Тадж., 2015, том 58. - №5. – С. 434-438.
5. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта. – М.: Колос, 1985. – 352 с.
6. Иванов А.А., Силина А.А., Цельникер Ю.Л. О методе быстрого взвешивания для определения транспирации в естественных условиях // Ботан. журн., 1950. - Т. 35, №2. - С. 171-185.
7. Медведев М.Ю. Водный режим основных доминантов в различных экологических условиях пустынной зоны Южного Таджикистана: Автореф. дис… канд. биол. наук. – Душанбе, 1984. – 21 с.
8. Молотковский Ю.И. Краткий очерк растительности заповедника «Тигровая балка». В сб: Природные ресурсы и заповедный фонд Таджикистана. Вып. 2. – Душанбе, 1985. – С. 102-121.
9. Петров М.П. Корневые системы растений почечной пустыни Каракумы, их распределение и взаимоотношения в связи с экологическими условиями. – Тр. по прикл. ботан., генет. и селекции: Систематика, география, экология. Сер.1, 1933. - №1. - С. 77-90.
10. Ротов Р.А. Биолого-морфологические особенности многолетних пустынных растений. - М., 1969. – 254 С.
11. Свешникова В.М. Доминанты Казахстанских степей. – Л., 1979. – 192 с.
12. Синидский Ю.В. Вредная энтомофауна и микрофлора лесных биогеоценозов пустынных зон Средней Азии: Автореф. дис… д-ра биол. наук. - Ташкент, 1967. – 46 с.
13. Шардаков В.С. Водный режим хлопчатника. - Ташкент, 1953. – 96 с.
14. Walter H. Die Hudratur der ptianze und ihze phusioiogische der – Bedeutung: Jenna. 1931. – 174 s.

ЭКОЛОГО-ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ *SALSOLA RIHTERI (MOG) KAR. EX LITV* В УСЛОВИЯХ ЗАПОВЕДНИКА «ТИГРОВАЯ БАЛКА»

В статье рассматривается наиболее важные экологические и физиологические свойства Salsola rihteri к экстремальным условиям существования. На основе изучения основных параметров водного режима, Salsola rihteri, а именно интенсивности транспирации, осмотического давления и сосущей силы, а также изменения этих показателей в продолжении сезона вегетации, представляется возможность судить о пластичности водного хозяйства и приспособительных реакциях Salsola rihteri к жаркому засушливому климату.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: адаптация, интенсивность, транспирации, осмотическое давление, сосущая сила, динамика, наибольшая и наименьшая величина, сезонные колебания.

ECOLOGICAL AND PHYSIOLOGICAL FEATURES OF SALSOLA RIHTERI (MOG) KAR. EX LITV IN TERMS OF THE RESERVE "TIGROVAYA BALKA"

The article deals with the most important ecological and physiological properties of Salsola rihteri to extreme conditions of existence. Based on the study of the main parameters of the water regime, Salsola rihteri, namely the intensity of transpiration, osmotic pressure and the sucking force, and changes in these indicators in the course of the season of vegetation, it is possible to judge on plasticity of water management and adaptive responses Salsola rihteri to the hot arid climate.

KEY WORDS: adaptation, intensity of transpiration, osmotic pressure, the sucking force, the dynamics of the highest and lowest value of seasonal fluctuations.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Бердыев Джума Бердыевич, кандидат биологических наук, доцент кафедры геоэкологии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 918-39-38-39.

Комилов Рахматулло, преподаватель кафедры геоэкологии КТГУ имени Носира Хусрав. Тел.: (+992) 987-82-99-34.

Рустамов Шухрат, преподаватель кафедры общей биологии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 938-17-72-22.

УДК: 635.21:631: 52

ФИТОФТОРОЗ (*PHYTOPHTHORA INFESTANS MONT. DE BARY.*) КАРТОФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ТАДЖИКИСТАНА

Партоев К., Каримов И., Нихмонов И.
Институт ботаники, физиологии и генетики растений
Академии наук Республики Таджикистан

В условиях Таджикистана отрасль картофелеводства играет особую роль в обеспечении продовольственной безопасности страны и картофель является ценной сельскохозяйственной культурой. В связи с этим, правительство республики уделяет особое внимание дальнейшему развитию этой отрасли. В 2012 году в республике была принята Государственная Программа по развитию картофелеводства, которая выдвигает новые задачи перед специалистами сельского хозяйства, а также селекционерами и фитопатологами по выведению новых перспективных сортов картофеля. В начале 70-х годов прошлого столетия учеными республики были установлены некоторые закономерности распространения грибковых, бактериальных, вирусных, вироидных и микоплазменных болезней картофеля, а также распространения тлей – основных переносчиков болезней картофеля в Таджикистане [1]. Было установлено, что распространение ряда грибковых, бактериальных, вирусных, вироидных болезней и их зоовекторов зависит от зоны возделывания картофеля, особенности рельефа местности, растительного покрова, скорости ветра, коммуникаций и т.д. Кроме того, были доказаны преимущества налаживания местного горного семеноводства картофеля и возможности отказа от завоза посадочного материала из других стран [2].

Фитофтороз, или поздняя гниль (*Phytophthora infestans Mont. de Bary*) — одна из самых вредоносных, быстро распространяющихся грибковых болезней картофеля, которая резко снижает урожай картофеля и поражает клубни во время хранения. Появляется она чаще всего в конце мая по август [3, 4, 5]. Особенно быстро распространяется в дождливые годы, а также при резкой смене дневной и ночной температуры, сопровождающейся обильными росами и туманами. Первоначальная причина возникновения болезни - посаженные в почву зараженные клубни картофеля. На пораженных ростках во влажной почве или внутри разросшегося куста образуются споры паразитного гриба, которые заражают почву и рядом находящиеся здоровые растения. С каплями дождя или росы споры проникают в почву, где заражают клубни

нового урожая картофеля. У пораженных растений картофеля вначале на кончиках листьев в нижнем ярусе появляются темно-бурые мокнущие пятна. Они могут возникать в любом месте стебля, но чаще всего ближе к верхушкам. Длительная теплая и влажная погода способствует быстрому развитию болезни. Надземная часть растений в течение нескольких суток (7-10 сутки) превращается в черную гниющую массу.

Материал и методика. Для выявления степени поражения разных сортов картофеля грибковым заболеванием фитофторозом (Phytophthora infestans. Mont. de Bary) нами в течение 2010-2012 гг. были проведены полевые опыты в различных высотах над уровнем моря (800, 1200, 1600, 2000 и 2700 м.) в условиях Гиссарской и Раштской долин Республики Таджикистан. Исходным материалом для проведения опытов служили здоровые элитные клубни сортов картофеля - Кардинал (Стандарт-St.), Зарина, Пикассо, Жуковский ранний, Дусти и Файзабад. Схема посадки сортов была 70х20 см, повторность вариантов опытов была четырехкратная, размещением рендомизированно. В каждой делянке посадили по 50 шт. семенных клубней с диаметром 35-50 мм, с каждого сорта учётных растений составило 200 растений. Учёт поражаемости растений фитофторой провели в фазе массового цветения. Агротехника возделывания на опытных участках была на основе принятой технологии в каждой зоне, и она в основном состояла из проведения посадки клубней, подкормки растений минеральными удобрениями (N:P:K) из расчёта 150:180:100 кг/га, в виде действующего вещества, проведением 6 разовым вегетативных поливов (в долине) и 10 разовым в горной зоне.

Результаты исследований. Наши исследования показали поражения картофеля грибковым заболеванием фитофторозом (*Phytophthora infestans Mont. de Bary*) в зависимости от вертикальной зональности расположения посадки картофеля.

Таблица 1

Поражаемость сортов картофеля в зависимости от вертикальной зональности над уровнем моря, n=200 растений (2010-2012 гг.).

Сорта картофеля	Порожаемость растений картофеля фитофторозом, %					
	800 м над ур. м.	1200 м над ур. м.	1600 м над ур. м.	2000 м над ур. м.	2700 м над ур. м.	Среднее
Кардинал (St.)	28,5	18,0	12,5	8,5	3,5	13,57
Пикассо	26,5	13,5	11,5	7,5	2,5	10,80
Зарина	25,5	12,5	10,0	7,5	3,5	10,30
Жуковский ранний	29,5	14,5	12,0	8,5	4,5	12,10
Дусти	19,5	8,0	6,0	3,5	0,5	6,80
Файзабад	18,5	9,0	4,0	3,0	1,0	6,50
Среднее	24,67	12,67	9,33	5,33	2,67	10,01
$НСР_{05}$	1,3	1,6	1,4	0,9	0,5	1,2

Как видно из данных таблицы 1 высота над уровнем моря играет важную роль в поражении сортов картофеля фитофторозом. Например, если сорта картофеля на высоте 800 м над уровнем моря в среднем поражаются 24,67%, то этот показатель на высоте 2700 м. над уровнем моря составляет всего лишь 2,67%. Это свидетельствует о том, что на высоте более 2500-2700 м. над уровнем моря из-за чистоты воздуха, прохладной горной погоды и высокой солнечной инсоляции (особенно ультрафиолетовой радиации), видимо гриб фитофторы не сможет нормально развиваться и вызывать болезни растений картофеля. Наоборот, в условиях долины, где условия для нормального роста и развития гриба наиболее благоприятны (тепло, влажный и загрязненный воздух) степень поражения растений почти в десять раз больше, чем в горных зонах.

Также нами установлено, что новые сорта картофеля Дусти и Файзабад в среднем по сравнению с другими сортами поражаются грибковым заболеванием фитофторы почти в 1,5-2,0 раза меньше, что видимо, связано с их генотипическими особенностями.

Таким образом, следует отметить, что на поражаемость сортов картофеля фитофторой влияет высота над уровнем моря по вертикальной расположенности зоны возделывания растений и генотип сортов. В связи с этим в будущем необходимо семеноводческие посевы картофеля разместить на высокогорной зоне республики, где мало встречаются грибковые болезни, переносчиков вирусной и других болезней картофеля.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Каримов Б.К. Столбур и нитевидность картофеля в Таджикистане. Научные труды НИИКХ. - М.: 1975. - вып. XXIV, 42. – С. 142-145.
2. Партоев К. Кн.: Селекция и семеноводство картофеля в условиях Таджикистана. – Душанбе, 2013. – 190 с.
3. Муминджанов Х.А. Физиолого-биотехнологический подход к селекции и семеноводству картофеля. – Душанбе, 2003. - 126 с.
4. Салимов А.Ф. Биотехнологические основы получения качественного семенного картофеля в Таджикистане. Автореф. дисс. док. с.-х.н. – Душанбе, 2007. - 48 с.
5. Еланский С.Н. Особенности развития фитофтороза в России. // Ж. Защита картофеля. - №1, 2015. - С. 8-11.

ФИТОФТОРОЗ (*PHYTOPHTHORA INFESTANS MONT. DE BARY.*) КАРТОФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ТАДЖИКИСТАНА

В статье отражается результаты опытов, подтверждающие, что сорта картофеля на высоте 800 м. над уровнем моря в среднем поражаются фитофторозом 24.67%, а на высоте 2700 м. над уровнем моря это составляет всего лишь 2,67%. Это свидетельствует о том, что на высоте более 2500-2700 м. над уровнем моря из-за чистоты воздуха, прохладной горной погоды и высокой солнечной инсоляции (особенно ультрафиолетовой части света), гриб фитофторы не сможет нормально развиваться и вызывать болезни растений картофеля. Наоборот, в условиях долины, где условия для нормального роста и развития гриба наиболее благоприятны (тепло, влажный и загрязненный воздух) степень поражения растений почти в десять раз больше, чем в горах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: картофель, фитофтороз, селекция, сорт, биотехнология, семеноводство, эффективность, Таджикистан.

THE POTATO BLIGHT (*PHYTOPHTHORA INFESTANS MONT. DE BARY.*) OF POTATO IN THE CONDITIONS OF TAJIKISTAN

As a result of the spent researches it is established that potato varieties at height of 800 m above sea level on the average are beaten by potato blight on 24.67 % and at height of 2700 m above sea level it makes only 2.67 %. It testifies that at height more than 2500-2700 m above sea level, because of cleanliness of air, cool mountain weather and high solar insulation (especially ultra-violet part of the light), the phytophthora fungus cannot normally develop and cause illness of a potato plant. On the contrary, in the conditions of a valley, where conditions for normal growth and development of a fungus optimum are favourable (heat, damp and polluted air) degree of defeat of plants almost ten times more than in mountains.

KAY WORDS: potato, potato blight, breeding, variety, biotechnology, seed production, efficiency, Tajikistan.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Партоев Курбонали, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, главный научный сотрудник Института ботаники, физиологии и генетики растений. АН РТ. Тел.: (+992) 918-64-95-05; e-mail: pkurbonali@mail.ru

Каримов Изомиддин, научный сотрудник Института ботаники, физиологии и генетики растений АН РТ. Тел.: (+992) 988-23-66-68.

Нихмонов Иматбек, соискатель Института ботаники, физиологии и генетики растений АН РТ. Тел.: (+992) 93-508-46-05.

ОЦЕНКА ОБРАЗЦОВ ХЛОПЧАТНИКА ВИДА *G. BARBADENZE L.* НА УСТОЙЧИВОСТЬ К ЧЁРНОЙ КОРНЕВОЙ ГНИЛИ

Сангинов А., Рустамов Ш.
Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

В последние годы посеянные сорта хлопчатника на юге Таджикистана поражаются чёрной корневой гнилью, что значительно снижает урожайность хлопка сырца с каждого гектара. В связи с этим появилась необходимость отыскать среди мирового разнообразия тонковолокнистых хлопчатников источник несущий в себе гены высокой комплексной устойчивости к этим опасным болезням. Исследование доноров устойчивости в практической селекции позволит увеличить устойчивость возделываемых сортов, что может быть реальным резервом повышения урожайности этой ценнейшей культуры.

В качестве материала для исследования использовали образцы хлопчатника вида G. barbadenze L. из мировой коллекции Российского научно-исследовательского института растениеводства имени Н.И. Вавилова. Оценку на устойчивость к корневой гнили получили 400 образцов коллекции, интродукцированные из 30 стран Азии, Америки, Африки и несколько образцов из Европы.

В качестве стандартных образцов использовались районированные сорта тонковолокнистого хлопчатника 9326-В, различающиеся по устойчивости к чёрной корневой гнили. Учёт пораженных чёрной корневой гнилью растений вели по внешним симптомам заболевания. Наблюдение за проявлением заболевания растений начинали с фазы появления массовых всходов, через каждые 2-3 дня до фазы появления 3-4 настоящих листочков.

Далее в связи со снижением заболевания, наблюдение вели через каждый 10 дней до конца вегетации, а после уборки оценка проводилась по косому срезу корневой гнили верхней части корня. Поражение образцов хлопчатника с черной корневой гнилью определяли по количеству пораженных растений, выраженному в процентах к общему числу учётных единиц на делянке.

При этом отдельно учитывались формы поражения по внешним симптомам (внешняя) и по срезу стеблей и корней (скрытая). Кроме оценки по устойчивости к заболеваниям в период вегетации проводились фенологические наблюдения и морфо-ботаническое описание каждого образца по методике отдела технических культур РНИИР имени Н.И. Вавилова.

В конце вегетации проводили учёт количества сформированных коробочек в среднем в одно растение, сбор пробных коробочек для лабораторных анализов, учёт до морозного и общего урожаев с делянки и в среднем с одного растения. По результатам полученных анализов определяли массу хлопка-сырца одной коробочки (крупность коробочки), выход и длину волокна на летучках, а также технологические показатели волокна образцов и линии, выделенных по устойчивости к болезням или другим хозяйственным признакам.

По агробиологическому изучению и оценки коллекции вида G. barbadenze L. На устойчивость к чёрно-корневому гнилью с 2013 года был поставлен опыт. С 2013 по 2015 годы на инфекционном фоне чёрной корневой гнили, с целю выявления резистентных форм, был высеян большой набор сортообразцов коллекции хлопчатника вида G. barbadenze L.

В задачу данной темы входило дать полную оценку, изучить и раскрыть генетическую природу иммунитета у сортообразцов различных эколого-географических групп хлопчатника вида G. barbadenze L. по степени устойчивости их к чёрной корневой гнили. В результате оценки на инфекционном фоне 400 образцов коллекции хлопчатника вида G. barbadenze L. были выделены 31 сортообразцов устойчивых к корневой гнили. В

таблице 1 представлена выделившихся по устойчивости образцов хлопчатника по корневой гнили вида G. Barbadenze L. за 2013-2015 годы.

Таблица 1

Выделеные сортообразцов хлопчатника по чёрной корневой гнили вида G. barbadenze L. (2013 – 2015 гг.)

Образцы по каталогу и интродукции РНИИР, №.	Названия сорта	Происхождение (страна)	Болезни корневой гнили в %
	СТ 9326 – В	Таджикистан	2,9
	504 – В	"	3,5
	750 – В	"	2,1
	748 - В	"	2,0
	2407 - В	"	1,9
4998	9133 – И	Туркмения	10,0
4405	8596 - И	"	1,4
4778	9046 - И	"	3,2
5005	9150 - И	"	4,8
5006	9130 - И	"	5,8
5007	9134 - И	"	1,6
5000	9183 - И	"	7,1
5014	8322 - И	"	5,7
5016	7750 - И	"	8,6
1103	Тангуис	"	1,4
5067	-----	Марокко	10,0
287782	-----	Уганда	5,4
4801	Менуфи	Египет	2,2
2001	10002	"	1,8
2002	0669	Загора	7,8
2036	01320	Босса	4,5
2303	2115 - Пима	"	3,4
2305	2406 - Пима	"	6,2
1988	4670 - 0670	Ашмуни	1,8
1992	4079 - 0590	"	3,2
2035	013680	"	9,4
326882	Местный хл- к.	Эквадор	4,8
331657	"	"	4,1
33657	"	"	5,3
338183	Перу	"	3,5

Чёрная корневая гниль, вызывает значительное снижение урожая хлопчатника, поэтому выведение устойчивых сортообразцов хлопчатника к этому заболеванию является одной из основных задач селекции.

В результате предварительных наблюдений нами установлено, что сорта тонковолокнистого хлопчатника поражаются чёрной корневой гнилью не в одинаковой степени. В селекционной работе принято оценивать устойчивость выводимых сортов растений к инфекционным болезням в условиях искусственного заражения.

Степень поражаемых сортов с коллекции корневой гнилью определяли в период всходов и в конце вегетации по срезам куста. При учётах устанавливали общее количество растений в рядке и больные. Больные растения дополнительно подвергались биологическому анализу.

Из данных таблицы видно, что сорта тонковолокнистого хлопчатника отличаются различной устойчивостью к чёрной корневой гнили.

К устойчивым сортам можно отнести сорта с Таджикистана 750-В, 748-В, 2407-В, с Туркмении сорта 8596-И, 9134-И, Тангуис, с Египта Менуфи, 10002, и Ашмуни. Остальные сортообразцы относятся к слабо пораженным растениям.

Выводы:

1. Изучение большого набора коллекционных образцов хлопчатника вида G. Barbadenze L. на инфекционном фоне выявило эколого – географическую специфичность образцов по реакции на действие патогена как по континентам, так и среди стран, позволило установить их разнообразие по степени устойчивости, подразделить и систематизировать сорта по группам, выделить новые генетические источники иммунитета.

2. Различия по устойчивости наблюдались по континентам и среди стран, а также внутри каждой из них между эволюционно давними и новыми селекционными сортами.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Московец С. Вирусное заболевание хлопчатника в Азербайджане // Ж «Советский хлопок», 1938. - №6.
2. Сангинов А.С. Изучение комбинационной способности сортов и гибридов тонковолокнолистого хлопчатника на инфекционном фоне / Актуальные вопросы земледелия Вахшской долины / Сборник научных трудов. - Душанбе, 1992.
3. Страумал Б.П. Селекция хлопчатника на устойчивость к болезням // Сельскохозяственная биология». Т. IV, 1969. - №6.

ОЦЕНКА ОБРАЗЦОВ ХЛОПЧАТНИКА ВИДА G. BARBADENZE L. НА УСТОЙЧИВОСТЬ К ЧЁРНОЙ КОРНЕВОЙ ГНИЛИ

На основе изучения большого набора коллекционных образцов хлопчатника вида G. Barbadenze L. на инфекционном фоне выявлено эколого-географическую специфичность образцов по реакции на действие патогена как по континентам, так и среди стран, позволило установить их разнообразие по степени устойчивости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: заболевание, хлопчатник, вегетация, корневая гниль, зародыш, поражение растений, коллекция, дневая температура, морфологические признаки.

ASSESSMENT KINDS OF COTTON CLASS BY G. BARBADENZE L. FOR STABILITY TO BLACK ROOT ROTTEN

On the bases of great number of study of collectional kinds of G. Barbadenze L. cotton kind in the infections ground found out the ecological and geographical sample specificity according to reaction to pathogen action as in the continents as among the countries, allon to set their diversity on stability degree.

KEY WORDS; Illness, cotton, vegetation, rooten, root, nucleus, lesion, plants, collection, immunity, daily temperature, morphological signs.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТРАХ: Сангинов Абдужалил Сангинович, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры общей биологии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 919-54-08-20.

Рустамов Шухрат Рустамович, преподаватель кафедры общей биологии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 938-17-72-22.

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ГИБРИДОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ ОТ ГЕОГРАФИЧЕСКИ ОТДАЛЁННЫХ РОДИТЕЛЬСКИХ ФОРМ СРЕДНЕВОЛОКНИСТОГО ХЛОПЧАТНИКА

Разокова Ф. С.

Курган-Тюбинский государственный университет имени Носира Хусрава

Асозода Н.М.

Таджикская академия сельскохозяйственных наук

При скрещивании географически и экологически отдаленных сортов хлопчатника проявляется гетерозис чаще, чем при близкородственной гибридизации. Гетерозис,

наблюдаемый у гибридов первого поколения F_1 свойство превосходить по определённым признакам лучшую из родительских форм, а также среднее двух родителей. Гетерозис может быть положительным и отрицательным.

Рост развития гибридов хлопчатника изучали многие учёные [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Однако в своих исследованиях они не касались показателей наследуемости, которые имеют большое значение в эффективности отбора.

Нами проводились учёты и наблюдения за ростом и развитием гибридов первого поколения (F_1), полученных от скрещивания отечественных и географически отдалённых родительских форм из Турции и Китая, характеризующихся высоким выходом волокна. Агротехника в селекционных питомниках соответствовала принятой в опытном хозяйстве Института земледелия ТАСХН. Однако следует, отметить, что первый полив в 2015 году задержан до 1 июля из-за недостатка воды.

Таблица 1.

Рост гибридов первого поколения в динамике

№ п/п	Гиридов F_1	25Y	24 YI				28YII			
		высота, см	Высота, см				Высота, см			
		F_1	F_1	P_1	P_2	Среднее 2х родит.	F_1	P_1	P_2	Среднее 2х родит.
1.	AC-4 x Декон	17,2	25,4	27,8	30,2	29,0	64,0	89,4	89,6	89,5
2.	CUZ-F_3 x Сорбон	24,2	31,0	32,6	37,2	34,9	68,0	88,4	98,6	93,5
3.	DP-5111 x Тезпур	24,6	33,2	30,2	35,4	32,8	70,6	77,8	88,1	82,9
4.	DPL-4158 x Ирам-1МН	21,0	31,2	31,4	26,6	29,0	80,0	85,4	75,0	80,2
5.	NAK-99/1 x Мехргон-1	23,0	33,4	25,2	29,2	27,2	72,4	80,4	83,2	81,8
6.	Назилли-66/100 x К-4388	26,6	38,6	32,9	24,4	28,8	80,0	68,2	79,0	73,6
7.	Назилли-84-S x К-9728	22,4	31,6	33,2	27,2	30,2	69,2	67.4	76.0	71,7
8.	Назилли-М-342 x С-6524	25,0	33,4	30,9	29,0	29,9	80,0	97,6	67,4	82,5
9.	Назилли-342-К-5959	17,0	21,8	31,2	33,2	32,2	79,0	97,2	67,6	82,4
10.	Сахин-2000 x Синдружун-1	23,6	31,4	28,0	32,2	33,6	78,8	72,8	76,6	74,7
11.	Аудин-110 x К-08388	23,8	32,2	24,2	34,6	29,4	83,2	69,6	75,0	72,3
12.	Озбек-142 x К-403855	17,0	24,0	26,8	36,0	31,4	74,8	75,6	65,4	70,5
13.	Госсуп. Назилли x К-7292	21,2	28,8	18,4	26,8	22,6	79,0	78,2	70,0	74,1
14.	Мендерез x К-08440	22,2	29,4	31,5	30,9	31,2	83,0	73,4	79,2	76,3
15.	Наппа-122 x Cocer	20,0	28,2	25,7	25,8	25,8	76,0	94,6	86,0	90,3
16.	ГСН-12х К-08628	20,0	27,4	24,0	27,2	25,6	73,8	93,0	95,2	94,1
17.	Зарногор стандарт	18,6	38,0				82.4			

На 25 мая у гибридов отмечено появление от 6,6 до 9,0 листочков, их высота составляла в среднем от 17,0 до 26,6 (табл.1). Как видно, преобладающее большинство (13) гибридов на 1,4-8,0 см. превышали по высоте стандартный сорт Зарнигор. По числу сформировавшихся настоящих листочков гибриды также превосходили стандарт (6,6 шт.) на 0,4-2,4 шт.

До 24 июня рост растений проходил не столь активно из-за пониженной влажности почвы. Так, средняя высота гибридов составляла от 21,8 до 38,6 см. Прирост за месяц от 4,8 до 10,0 см. Высота растений материнских сортов (P_1) варьировала от 18,4 до 33,2 см. отцовских сортов (P_2)-от 24,4 до 39,2 см. (таб. 1). Из 16 гибридов F_1 у 7 (43,8%) по высоте растений проявлен положительный гетерозис. Наблюдалось превосходство по данному признаку над средним значением двух родительских сортов на 1,8-9,8 см. Гибриды в основном также превышали стандартный сорт (25,0 см.) на 2,4-8,4 см. Хлопчатник находился в фазе начала бутонизации.

После проведения первого полива развитие растений в питомниках активизировалось, о чём свидетельствуют результаты измерений на 28 июля. Так, высота гибридов, отмечена в диапазоне 64,0-83,2 см. по прежнему у 6 гибридов наблюдался положительный гетерозис. Превосходство по высоте растений над лучшим

родителем и средним значением двух родительских сортов составило от 0,8 до 10,9 см., то есть гетерозис снизился по сравнению с июньским периодом (24 VI), произошло его затухание.

Средняя высота материнских сортов варьировала от 67,4 до 97,6 см., отцовских сортов – от 65,4 до 98,6 см. Низкий рост (65,4-67,6 см.) отмечен у сортов С-6524, К-5959 и К-403855. В питомнике родительских форм стандарт Зарнигор имел высоту 99,2 см.

Наследование высоты растений гибридами F_1 проходило на 100% от отцовских сортов, коэффициент наследуемости h^2 в узком смысле равен 1,0.

Важным признаком, определяющим урожайность хлопчатника, является число коробочек на кусте. На 28 июля все гибриды по набору коробочек на одно растение на 2,6-10,0 шт. превышали сорт Зарнигор. У материнских сортов данный показатель варьировал в диапазоне 6,4-9,4 шт., у отцовских 5,0-12,2 шт.

У всех гибридов наблюдался положительный гетерозис. Превосходство над средним значением двух родительских сортов составило 2,2-9,7 короб/раст. Наибольший гетерозис 4,2-9,7 короб/раст выявлен у гибридов: DP-5111хТезпур, DPL-4158хИрам-1 МН, Назилли 66/100хК-4388, Назилли-М-342хС-6524, Аудин-110хК-08388, Госсуп. НазиллихК-7292, МендерезхК-08440 и ГСН-12хК-08628.

Через месяц, в конце вегетации на 30 сентября количество коробочек на одном растений увеличилось во всех растениях питомника. У гибридов оно отмечалось в диапазоне 12,8-17,3 короб/раст., и превышало стандарт на 11,4 короб/раст. Размах варьирования на одном растении у материнских сортов (P_1) составил 10,0-16,0, у отцовских - 10,3-15,5 короб/раст. Гетерозис в диапазоне 0,4-4,4 короб/раст. выявлен у всех гибридов. Наибольшее превосходство над средним значением числа коробочек на одном растение в диапазоне 0,8-4,4 шт. наблюдалось у гибридов АС-4хДехкон, DPL-4158х Ирам-1 МН, Назилли-М-342хС-6524 и Сахин-2000хСиньруджун-1.

Как показали расчёты, коэффициент наследуемости по формированию числа коробочек от материнских сортов в узком смысле h^2 равен 0,72, то есть 72% фенотипической изменчивости коробочек у гибридов F_1 обусловлено наследованием от материнских сортов.

Выводы:

1. Гибриды первого поколения, полученные от скрещивания географически отдалённых сортов средневолокнистого хлопчатника, характеризовались более активным развитием по сравнению со своими исходными родительскими формами. Наблюдался гетерозис по высоте и количеству коробочек на одном растении.

2. Высота гибридных растений наследовалась на 100% отцовских сортов, коэффициент наследования h^2 равен 1,0. Фенотипическая изменчивость по формированию коробочек 72% обусловлена наследованием со стороны материнских сортов.

3. Наибольший гетерозис по набору коробочек на 30 сентября в диапазоне 0,8-4,4 шт./раст. выявлен у гибридов АС-4хДехкон, DPL-4158хИрам-1 МН, Назилли-М-342хС-6524 и Сахин-2000хСиньруджун-1.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Высоцкий К. А. Использование гетерозиса в хлопководстве // Хлопководство, 1959. - №12. - С. 28.
2. Высоцкий К. А. Новый метод массового получения гибридов // Хлопководство, 1962. - №11. - С. 2.
3. Мансуров Н.И. Изучение и пути использования гетерозиса хлопчатника: автореф. дис. канд. с.-х. наук. - Душанбе, 1962. – 21 с.

4. Исанов М. И. Комбинационная способность некоторых отечественных и зарубежних сортов хлопчатника вида G. hirutum L: автореф. дис... канд. с.-х. наук. - Ташкент, 1969. – 22 с.
5. Яхьёев Т. К. Изменчивость продуктивности и скороспелости у гибридов хлопчатника при гибридизации географически отдалённых форм в зависимости от способа опыления: атореф. дис... на соис. уч. степени канд. с.-х. наук. - Душанбе, 2002. – 28 с.
6. Негматов М.М. Изучение комбинационной способности географически отдалённых гибридов хлопчатника на гетерозис: автореф. дис... на соиск. уч. степени канд. с.-х наук. - Душанбе, 2009. – 18 с.
7. Суярова С. Дж. Создание интрогрессивных, скороспелых, высокопродуктивных генотипов в селекции хлопчатника на основе использования географически отдалённых форм: автореф. дис… на соиск. уч. степени канд. с.-х. наук. - Душанбе, 2012. – 22 с.

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ГИБРИДОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ ОТ ГЕОГРАФИЧЕСКИ ОТДАЛЁННЫХ РОДИТЕЛЬСКИХ ФОРМ СРЕДНЕВОЛОКНИСТОГО ХЛОПЧАТНИКА

В статье анализируются параметры роста и развития гибридов первого поколения по сравнению с исходными родительскими формами. Определены коэффициенты наследуемости высоты растений и набора коробочек. Выделены гибриды F_1, проявившие наибольший гетерозис по числу коробочек на расстений, признаку, являющемуся ведущим компонентом урожайности хлопчатника.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: хлопчатник, гибриды первого поколения, родительские формы, наследование высота растений, число коробочек, гетерозис.

THE FEATURES OF THE DEVELOPMENT OF THE FIRST GENERATION HYBRIDS FROM GEOGRAPHICALLY REMOTE PARENTAL FORMS OF MIDDLEFIBRE COTTON

The article analyzes the parameters of the growth and development of the first generation hybrids compared to the original parent forms. Determination of the coefficient of heritability of plant height and of set of boxes. The selected F1 hybrids showing the highest heterosis for number of bolls per plant basis, which is the leading component of cotton yield.

KEY WORDS: cotton, hybrids of the first generation, the parent form, the inheritance of plant height, number of bolls, heterosis.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ: Раззокова Фотима, преподаватель кафедры общей биологии КТГУ имени Носира Хусрава. Тел.: (+992) 93-529-65-52.

Асозода Нурали Махмадулло, доктор сельскохозяйственных наук, профессор, академик ТАСХН. Тел.: (+992) 93-536-63-66.

БА ТАВАҶҶУҲИ МУАЛЛИФОН

Маҷаллаи «Паёми Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав» нашрияи Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав ба ҳисоб меравад.

Маҷалла тибқи «Қонун дар бораи матбуот ва воситаҳои ахбори умум» интишор мегардад.

Дар силсилаи илмҳои табиии маҷалла натиҷаи корҳои илмӣ-таҳқиқотии профессорону омӯзгорони донишгоҳ ва уламои ватаниву хориҷӣ оид ба риёзиёт, физикаю технология, химия ва биология нашр карда мешавад.

Ҳайати таҳририя, ки ба он мутахассисони соҳаҳои илм шомиланд, бо фармони ректори Донишгоҳ тасдиқ карда шудааст.

Маҷалла мақолаҳои илмию назариявиро вобаста ба нусхаи асл ба забонҳои тоҷикӣ, русӣ ва англисӣ ба табъ расонида, соле 4 маротиба нашр мешавад. Маҷалла мақолаҳои илмиро тибқи қарори кафедра қабул менамояд.

Мақолаҳое, ки ба суроғаи маҷаллаи «Паёми Донишгоҳи давлатии Қӯрғонтеппа ба номи Носири Хусрав» ирсол карда мешаванд, бояд ба талаботи зерин ҷавобгӯ бошанд:

Дар мақолаҳои илмӣ ҳалли масъалаҳо аниқ ва равшан ифода гардад.

Ҳаҷми мақола якҷоя бо расм, ҷадвал, диаграмма, график ва матни аннотатсия (0,5 сах.) набояд аз 10 саҳифаи чопӣ зиёд бошад.

Мақолаҳо бояд дар компютер тибқи барномаи Microsoft Word бо шрифти Times New Roman Tj 14, андозаи А4 ҳуруфчинӣ ва дар диск сабт карда шаванд.

Фосилаи байни сатрҳо 1 см, ҳошия аз тарафи чап 3 см, аз тарафи рост 2 см, аз боло 3 см ва поёни саҳифа 2,5 см-ро ташкил намуда, матни мақола аз тарафи рост саҳифабандӣ карда шавад.

Дар саҳифаи аввал номи мақола, дар сатри дуюм ному насаби муаллиф ва муассисаи корӣ навишта мешавад.

Баъди матни асосӣ номгӯи адабиёти истифодашуда тибқи муқаррарот нишон дода мешавад. Пас аз рӯйхати адабиёт мазмуни мухтасари мақола ба забонҳои русӣ ва англисӣ, ҳамчунин калидвожаҳо ба ин забонҳо (то 10 калима) илова мегардад.

Мақолаҳои илмие, ки ба идораи маҷалла ирсол мешаванд, бояд варақаи экспертӣ, маълумотномаи муаллифӣ ва тақризи мутахассисони соҳаро дошта бошанд.

Дар охири мақола ному насаб, ҷои кор, дарҷаву унвони илмӣ, суроғa, рақами телефон, e-mail ва имзои муаллиф ҷой дода мешаванд.

Ҳайати таҳририя ҳуқуқ дорад, ки мақолаҳои илмиро ихтисору ислоҳ намояд ва ё мустақилона барои тақризи иловагӣ фиристонад.

Мақолаҳое, ки сатҳи илмии онҳо ҷавобгӯи талабот нест, ба нашр расонида намешаванд.

Аз аспирантон барои нашри мақола маблағ гирифта намешавад.

Дастхати мақолаҳо баргардонида намешаванд.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В серии естественных наук научного журнала «Вестник Курган-Тюбинского государственного университета имени Носира Хусрава» печатаются статьи, содержащие результаты научных исследований по математическим, физическим, технологическим, химическим и биологическим наукам.

При отправке статьи в редакцию авторам необходимо соблюдать следующие правила:

Объем статьи не должен превышать 10 страниц компьютерного текста, включая текст, таблицы, библиографию, рисунки и тексты аннотаций на русском и английском языках.

Статья должна быть подготовлена в системе Microsoft Word. Одновременно с распечаткой статьи сдается электронная версия статьи. Рукопись должна быть отпечатана на компьютере (гарнитура Times New Roman Tj 14, формат А4, интервал одинарный, поля: верхнее-3 см, нижнее-2,5 см, левое-3 см, правое-2 см), все страницы статьи должны быть пронумерованы.

Сверху страницы по центру листа указывается название статьи, ниже через один интервал инициалы и фамилии автора (авторов). Далее через строку следует основной текст.

Ссылки на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1]. Список литературы приводится общим списком после основного текста (под заголовком «литература») в порядке упоминания в тексте.

К статье прилагается резюме на русском и английском языках с указанием названия статьи. Текст резюме приводится в конце статьи после списка использованной литературы. В конце резюме приводятся ключевые слова (до 10 слов) на русском и английском языках.

Научные статьи, представленные в редакцию журнала, должны иметь экспертное заключение, авторскую справку и отзыв специалистов о возможности опубликования.

В конце статьи приводятся сведения об авторе (авторах) с указанием ученой степени, ученого звания, должности, названия организации, адреса, телефона, e-mail.

Редколлегия оставляет за собой право производить сокращения и редакционные изменения статьи.

Статьи, не отвечающие настоящим требованиям, редколлегией не принимаются.

Плата за опубликование рукописей аспирантов не взимается.

Рукописи не возвращаются.

МУНДАРИҶА

МАТЕМАТИКА

Курбаншоев С.З.
ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ…..... 3

Сафаров Д.С.
ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ …… 5

Сатторов А.Э.
КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СВЯЗНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ…… 11

Махкамов К.Ш.
СЛОЖНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА С ЯДРАМИ ИЗ КЛАССОВ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ…… 14

Хайруллоев Ш.А.
ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И ЕЁ НУЛИ…… 16

Гаюров А.Т.
ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЕ ОБОБЩЁННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВТОРОГО РОДА….. 21

Исматов С.Н.
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО МНОГОЧЛЕНА С АРГУМЕНТОМ ПРОБЕГАЮЩИЙ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ИЗ КОРОТКОГО ИНТЕРВАЛА……..... 26

Саидназаров Р.С., Мухаммадали Дж.
ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ n –ГО ПОРЯДКА…… 27

Юнуси М.К, Одинаева С.А, Махмадалиев Х .С., Гулов С.Х.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ЧИСЛЕННОСТИ ХИЩНИКОВ ЭКОСИСТЕМ РЕГИОНАЛЬНЫХ ЗАПОВЕДНИКОВ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН……. 34

ФИЗИКА

Муродов Ф.Р., Муродов К.Ф., Бобокалонов Н.Р., Дилшоджони С. Дж.
ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ НЕРАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ АСИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОЙ СИСТЕМЫ…… 53

Тургунбаев М.Т., Хусайнов З.К., Сафаров Ш.Р., Сафаров М.М.,Зарипова М.А.,
ВЗАИМОСВЯЗЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ГИДРАЗИН-ЗАМЕЩЕННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПРИ АТМОСФЕРНОМ ДАВЛЕНИИ……..... 57

Раупов Н.М., Абдурахмонов Г.Т., Рахимов З.С., Назаров Х.Х.
О ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ОМА В ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА…… 61

Сафаров М.Г., Раупов Н.М., Раҳимов З.С.
ПРИМЕНЕНИЕ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ В ЮЖНЫХ РЕГИОНАХ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН……..... 66

ХИМИЯ

Мирсаидов У.М., Бадалов А.Б., Ғафуров Б.А., Болтаев М.А.
ТАҲЛИЛИ СИСТЕМАТИКИИ ЭНТАЛПИЯИ ҲОСИЛШАВИИ ИОНҲОИ ГАЗШАКЛИ ЛАНТАНОИДҲО…… 70

Маматов Э.Д., Сулаймони М.А., Рахматуллоева М.Ш., Расулов У.З., Хидиров М.С.
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫЩЕЛАЧИВАНИЯ ДАНБУРИТОВОЙ РУДЫ МЕСТОРОЖДЕНИЯ АК-АРХАР…… 72

Ятимов П.М.
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ХЛОРИРОВАНИЕ ДАНБУРИТА……..... 79

БИОЛОГИЯ

Бердыев Д., Б., Комилов Р., Рустамов Ш.
ЭКОЛОГО-ФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ *SALSOLA RIHTERI (MOG.) KAR. EX LITV.* В УСЛОВИЯХ ЗАПОВЕДНИКА «ТИГРОВАЯ БАЛКА»…….…… 83

Партоев К., Каримов И., Нихмонов И.
ФИТОФТОРОЗ (*PHYTOPHTHORA INFESTANS MONT. DE BARY.*) КАРТОФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ТАДЖИКИСТАНА…… 88

Сангинов А., Рустамов Ш.
ОЦЕНКА ОБРАЗЦОВ ХЛОПЧАТНИКА ВИДА G. BARBADENZE L.
НА УСТОЙЧИВОСТЬ К ЧЁРНОЙ КОРНЕВОЙ ГНИЛИ….……..... 91

Разокова Ф. С., Асозода Н.М.
ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ ГИБРИДОВ ПЕРВОГО ПОКОЛЕНИЯ ОТ ГЕОГРАФИЧЕСКИ ОТДАЛЁННЫХ РОДИТЕЛЬСКИХ ФОРМ СРЕДНЕВОЛОКНИСТОГО ХЛОПЧАТНИКА...…… 93

БА ТАВАҚҚУҲИ МУАЛЛИФОН……... 97

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ..……..... 98

Маҷалла дар Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон
таҳти № 0184 мҷ, аз 25 декабри соли 2013 номнавис шудааст.

Журнал зарегистрирован в Министерстве культуры
Республики Таджикистан за № 0184 мч, от 25 декабря 2013 года.

Масъули чоп: Болтаев М.А.

Муҳаррирон: Тағоймуродов Р.
Гулов А.
Қурбонов Б.

Муҳаррири техникӣ: Тоҳирҷонов Б.Т.

Ответственный редактор: Болтаев М.А.

Редакторы: Тагаймуродов Р.
Гулов А.
Курбонов Б.

Технический редактор: Тохирджонов Б.Т.

Нишонӣ: ДДҚ ба номи Носири Хусрав,
ш. Қӯрғонтеппа, кӯчаи Айнӣ, 67, бинои асосӣ.
Тел.: (8-3222) 3-04-68.

Адрес: КТГУ имени Носира Хусрава,
г. Курган-Тюбе, ул. Айнӣ, 67, главный корпус.
Тел.: (8-3222) 3-04-68.

Ба чоп 30.06. 2016 таҳвил шуд. Чопи офсетӣ.
Андозаи 60x84/16. Ҷузъи чопӣ 12,5.

http://www.ktgu-vestniki.com
e-mail: payomiddq@mail.ru
e-mail: ktgu-vestniki.mail.ru

Маҷалла дар ҶДДМ «Матбаа»-и ш. Қӯрғонтеппа нашр шудааст.
Индекс 77737. Адади нашр 500 нусха.

Журнал отпечатан в ООО «Матбаа» г. Курган-Тюбе.
Индекс 77737. Тираж 500 экз.